

УДК 519.17

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ СЕТИ

Борис Игнатьевич Смагин

доктор экономических наук, профессор

bismagin2023@mail.ru

Мичуринский государственный аграрный университет

г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Задача минимизации сети состоит в нахождении ребер, соединяющих все узлы сети и имеющих минимальную суммарную длину. Очевидно, что решение задачи не должно содержать циклов. Отсутствие циклов в минимальной сети естественным образом привело к ее названию – минимальное дерево-остов, которое можно определить итеративным процессом.

Алгоритм решения данной задачи рассмотрен на конкретном примере, причем графические построения выполнены с использованием пакета символьной математики Maple.

Ключевые слова: математический граф, вершины и дуги графа, длина пути графа, пакет символьной математики Maple.

Граф представляет собой совокупность точек и линий, соединяющих эти точки. Данные соединения могут обладать многими характеристиками и теория графов, по существу, занимается изучением этих характеристик.

Вследствие общего характера представлений основные концепции теории графов нашли широкую сферу применения. Графы используются для формализованной постановки множества задач, связанных с дискретным размещением объектов. К ним, в частности, относятся: проектирование и исследование сетей связи, задачи календарного планирования, максимизация производительности поточной линии, исследование движения транспорта, теория игр, экономические задачи и т.д.

Наглядное представление об ориентированном графе (орграфе) можно получить, если представить некоторое множество точек плоскости X , называемых вершинами и множество направленных отрезков U , соединяющих все или некоторые из вершин и называемых дугами. Дуга, у которой вершина a является первым элементом, а вершина b — вторым, называется дугой из a в b (a, b). Заметим, что дуги (a, b) и (b, a) различны.

Математически граф G можно отобразить как пару множеств X и U :

$$G = (X, U).$$

Иногда бывает удобно дать графу другое определение. Можно считать, что множество направленных дуг U , соединяющих элементы множества X , отображает это множество само в себя. Поэтому можно считать граф заданным, если даны множество его вершин X и способ отображения Γ множества X в X . Таким образом, граф G есть пара (X, Γ) , состоящая из множества X и отображения Γ , заданного на этом множестве.

$$G = (X, \Gamma).$$

Граф $G' = (X', \Gamma')$ называется подграфом графа $G = (X, \Gamma)$, если X' , Γ' содержатся соответственно в X , Γ . Частичным графом G_Δ по отношению к графу $G = (X, \Gamma)$ называется граф, содержащий только часть дуг графа G , т.е. определяемый условием

$$G_{\Delta} = (X, \Delta), \text{ где } \Delta \subset \Gamma.$$

Пусть $G = (X, \Gamma)$ – карта шоссейных дорог России. Тогда карта шоссейных дорог Тамбовской области представляет собой подграф, а карта главных дорог России – частичный граф.

Две вершины графа a и b являются смежными, если они различны и существует соединяющая их дуга. Дуга, соединяющая вершины a и b и направленная от a к b обозначается $u = (a, b)$.

Путем в орграфе G называется такая последовательность дуг $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом последующей. Путь μ , последовательными вершинами которого являются $a, b, \dots, m$, обозначается через $\mu = (a, b, \dots, m)$.

Длиной пути $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ называется число $l(\mu) = k$, равное числу дуг, составляющих путь. Путь может быть конечным и бесконечным. В случае бесконечного пути полагаем $l(\mu) = \infty$. Путь, в котором никакая дуга не встречается дважды, называется простым. Путь, в котором никакая вершина не встречается дважды, называется элементарным.

Контур – это конечный путь $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, у которого начальная вершина u_1 совпадает с конечной вершиной u_k . При этом контур называется элементарным, если все его вершины различны (за исключением начальной и конечной, которые совпадают).

Контур единичной длины, образованный дугой вида (a, a) называется петлей.

Полным ориентированным графом называется граф, каждая пара вершин которого соединена в точности одним ориентированным ребром. Если с каждого ребра полного ориентированного графа снять направление, то образуется полный граф с неориентированными ребрами. В этом случае его называют неориентированным графом. Для неориентированного графа понятия дуга, путь и контур заменяются понятиями ребро, цепь, цикл. Ребро – это отрезок, соединяющий две вершины. Цепью называется последовательность ребер.

Циклом называется конечная цепь, у которой начальная и конечная вершины совпадают.

Простая цепь (цикл, путь, контур), содержащая все ребра (дуги) графа, называется эйлеровой цепью (соответственно циклом, путем, контуром).

С понятием неориентированного графа связана важная характеристика, называемая связностью графа. Говорят, что граф связан, если любые две его вершины можно соединить цепью. Если граф G не связан, то его можно разбить на такие подграфы G_i , что все вершины в каждом подграфе связны, а вершины из различных подграфов не связны. Такие подграфы G_i называются компонентами связности графа G .

Для ориентированного графа существует понятие сильной связности. Граф сильно связан, если для любых двух вершин a и b ($a \neq b$) существует путь, идущий из a в b .

Связный граф, в котором существует эйлеров цикл, называется эйлеровым графом.

Элементарная цепь (цикл, путь, контур), проходящая через все вершины графа, называется гамильтоновой цепью (соответственно циклом, путем, контуром). Граф называется гамильтоновым, если он содержит гамильтонов цикл, проходящий через все его вершины.

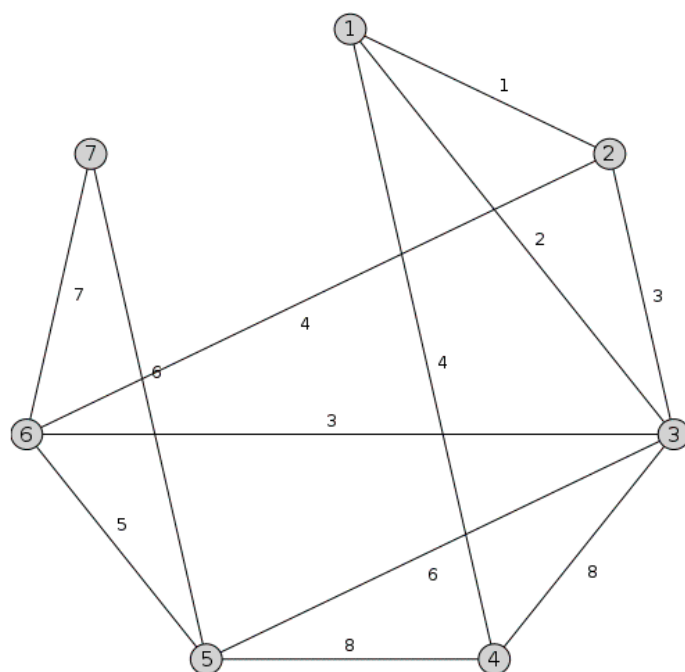
Важным частным случаем неориентированного графа является дерево. Деревом называется конечный связный неориентированный граф, не имеющий циклов.

Граф называется плоским (планарным), если его можно изобразить на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не имели других общих точек, кроме их общей вершины. Чертеж графа, на котором никакие два ребра не пересекаются, называют плоским представлением графа. Заметим, что плоский правильно нарисованный граф разбивает плоскость на несколько частей.

Задача минимизации сети состоит в нахождении ребер, соединяющих все узлы сети и имеющих минимальную суммарную длину. Очевидно, что решение задачи не должно содержать циклов.

Отсутствие циклов в минимальной сети естественным образом привело к ее названию – минимальное дерево-остов, которое можно определить итеративным процессом. Начать с любого узла и соединить его с ближайшим узлом сети. Соединенные два узла образуют теперь связное множество, а остальные узлы – несвязное множество. Затем в несвязном множестве следует выбрать узел, который расположен ближе других к какому-либо узлу связного множества. Далее, корректируя соответствующим образом связное и несвязное множества, повторяем процесс до тех пор, пока в связное множество не попадут все узлы сети. В случае одинаково удаленных узлов можно выбрать любой из них, что указывает на неоднозначность минимального дерева – остова.

В качестве примера построим минимальное дерево – остов для ниже изображенной сети.



Начнем вычисления с узла 1, т.е. в начальный момент он соответствует множеству «связных узлов». Множество несвязных узлов представлено узлами 2, 3, 4, 5, 6, 7. Символически это можно записать в виде $S = \{1\}$; $\bar{S} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Итерация 1. Узел 1 соединить с узлом 2 ближайшем к 1 в множестве $\bar{C} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Таким образом, после первой итерации имеем: $C = \{1, 2\}$; $\bar{C} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Итерация 2. Узлы 1 и 2 из множества C связны. На второй итерации следует выбрать в $\bar{C} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ узел, ближайший к одному из узлов в $C = \{1, 2\}$. Поскольку кратчайшим оказывается расстояние между узлами 1 и 3, получим: $C = \{1, 2, 3\}$, $\bar{C} = \{4, 5, 6, 7\}$.

Итерация 3. Оценим расстояния от узлов из $C = \{1, 2, 3\}$ до всех узлов из $\bar{C} = \{4, 5, 6, 7\}$. Поскольку кратчайшим является расстояние между узлами 3 и 6, получим: $C = \{1, 2, 3, 6\}$, $\bar{C} = \{4, 5, 7\}$.

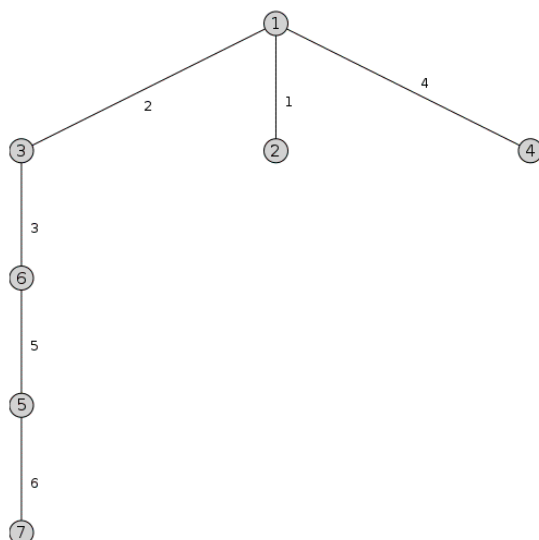
Итерация 4. Выбираем в $C = \{1, 2, 3, 6\}$ узел, ближайший к одному из узлов в $\bar{C} = \{4, 5, 7\}$. Поскольку кратчайшим является расстояние между узлами 1 и 4, получим: $C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $\bar{C} = \{5, 7\}$.

Итерация 5. На данной итерации следует связать узлы 5 и 6, т.е. $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\bar{C} = \{7\}$.

Итерация 6. На шестой последней итерации соединяем узлы 5 и 7.

Поскольку все узлы связаны, минимальное дерево-остов построено и процедура завершается. Минимальная длина равна $1 + 2 + 4 + 3 + 5 + 6 = 21$.

Таким образом, имеем:



Графические построения выполнены с использованием пакета
символьной математики Maple [3].

Список литературы:

1. Горюшкин А.П. Машинное решение задач дискретной математики// Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (3). С. 58 – 68
2. Кирсанов М.Н. Графы в Maple. Задачи, алгоритмы, программы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 168 с.
3. Смагин Б.И. Экономико-математические методы: учебник для академического бакалавриата. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2017. 272с.

UDC 519.17

THE TASK OF MINIMIZING THE NETWORK

Boris Ig. Smagin

doctor of economics, professor

bismagin2023@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University

Michurinsk, Russia

Abstract. The task of minimizing the network is to find edges connecting all nodes of the network and having a minimum total length. Obviously, the solution of the problem should not contain cycles. The absence of cycles in the minimal network naturally led to its name, the minimal backbone tree, which can be determined by an iterative process.

The algorithm for solving this problem is considered on a specific example, and graphical constructions are performed using the symbolic mathematics package Maple.

Keywords: mathematical graph, vertices and arcs of graph, path length of graph, symbolic mathematics package Maple.

Статья поступила в редакцию 10.09.2025; одобрена после рецензирования 20.10.2025; принята к публикации 31.10.2025.

The article was submitted 10.09.2025; approved after reviewing 20.10.2025; accepted for publication 31.10.2025.