УДК 519.17

ЗАДАЧА ВЫБОРА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

Борис Игнатьевич Смагин
доктор экономических наук, профессор
bismagin2023@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. В практических приложениях большое значение имеет задача о нахождении кратчайшего пути между двумя вершинами связного неориентированного графа, к которой сводятся многие задачи выбора наиболее экономичного маршрута, многие задачи выбора наиболее экономичного способа перевода динамической системы из одного состояния в другое и т.д. Был разработан ряд методов решения подобных задач, и очень часто методы, основанные на теории графов, оказываются наименее трудоемкими.

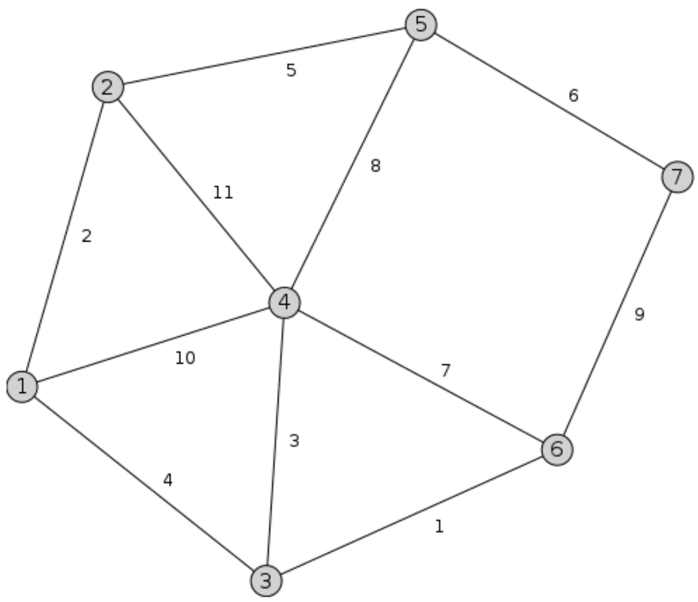
Алгоритм решения данной задачи рассмотрен на конкретном примере, причем графические построения и использование алгоритма Дейкстры выполнены с использованием пакета символьной математики Maple.

Ключевые слова: связный неориентированный граф, выбор кратчайшего пути, пакет символьной математики Maple, алгоритм Дейкстры.

В практических приложениях большое значение имеет задача о нахождении кратчайшего пути между двумя вершинами связного неориентированного графа, к которой сводятся многие задачи выбора наиболее экономичного (с точки зрения расстояния, времени или стоимости) маршрута на имеющейся карте дорог, многие задачи выбора наиболее экономичного способа перевода динамической системы из одного состояния в другое и т.д. Был разработан ряд методов решения подобных задач, и очень часто методы, основанные на теории графов, оказываются наименее трудоемкими.

Задача о кратчайшем пути в общем виде может быть сформулирована следующим образом. Предположим, что имеется неориентированный граф G=(X,U), и каждому его ребру приписано некоторое число называемое длиной ребра (в действительности это может быть расстояние между вершинами, соединяемыми ребром u, временем или стоимостью проезда по нему и т.п.). Тогда любая цепь μ будет характеризоваться длиной $\ell(\mu)=\sum_{u\in\mu}\ell(u)$; в рассматриваемой задаче требуется найти цепь минимальной длины [3].

Алгоритм нахождения кратчайшего пути рассмотрим на конкретном примере



Узел 1 данной сети представляет собой начальную точку (исходный пункт, а узел 7 – конечную точку (пункт назначения).

Введем следующие обозначения:

d_{ij} – расстояние между смежными узлами i и j;

u_j – кратчайшее расстояние между узлами 1 и j ($u_1 = 0$).

Процедура закончена, когда получено значение u_7. Общая формула для вычисления   имеет вид:

$$u_j = \left\{ \begin{matrix} \text{кратчайшее расстояние до предыдущего} \\ \text{узла } i + \text{расстояние между текущим} \\ \text{узлом } j \text{ и предыдущим узлом } i \end{matrix} \right\} = \min_i \left(u_i + d_{ij} \right)$$

Из этой формулы следует, что кратчайшее расстояние u_j можно вычислить лишь после того, как определено кратчайшее расстояние до каждого предыдущего узла i, соединенного дугой с узлом j.

Для узла 1 можно вычислить лишь u_2 и u_3. Заметим, что хотя узел 4 соединен с узлом 1 дугой, соответствующее значение u_4 вычислить нельзя, пока не будут определены u_2 и u_3.

Вычислительная схема состоит из следующих этапов:

Этап 1: $u_1 = 0$

Этап 2: $u_2 = u_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2$ (из 1)

$u_3 = u_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4$ (из 1)

Этап 3: $u_4 = \min\{u_1 + d_{14}, u_2 + d_{24}, u_3 + d_{34}\} = \min\{0 + 10, 2 + 11, 4 + 3\} = 7$ (из 2)

Этап 4: $u_5 = \min\{u_2 + d_{25}, u_4 + d_{45}\} = \min\{2 + 5, 7 + 8\} = 7$ (из 2)

$u_6 = \min\{u_3 + d_{36}, u_4 + d_{46}\} = \min\{4 + 1, 7 + 7\} = 5$ (из 3)

Этап 5: $u_7 = \min\{u_5 + d_{57}, u_6 + d_{67}\} = \min\{7 + 6, 5 + 9\} = 13$ (из 2)

Минимальное расстояние между узлами 1 и 7 равно 13, а соответствующий маршрут: 1→2→5→7

Рассмотрим решение вышеуказанной задачи на основе использования программы символьной математики Maple [1,2].

Для решения задачи сначала войдем в пакет «GraphTheory» (Теория графов), зададим наш граф перечислением ребер – множества E, и посмотрим на его и изображение.

> $with(GraphTheory)$:

> $E := \{[\{1,2\},2], [\{1,3\},4], [\{1,4\},10], [\{2,4\},11], [\{2,5\},5], [\{3,4\},3], [\{3,6\},1], [\{4,5\},8], [\{4,6\},7], [\{5,7\},6], [\{6,7\}, 9]\}$:

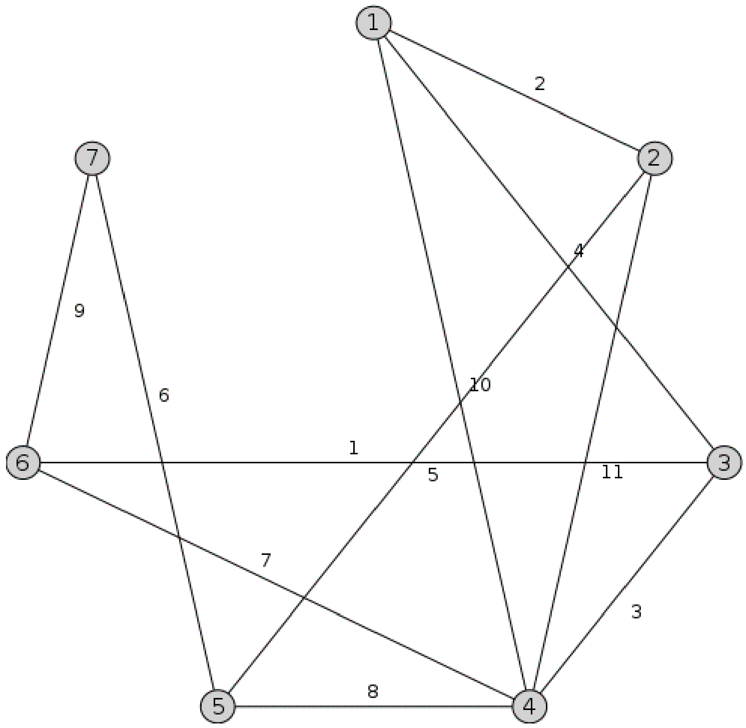
> $G := Graph(E)$;

$G :=$

Graph 1: an undirected weighted graph with 7 vertices and 11 edge(s)

Maple сообщил, что граф неориентированный с 7 вершинами и 11 ребрами. Даем команду нарисовать граф.

> $DrawGraph(G)$;



Найдем теперь кратчайший путь в графе G, соединяющий вершины 1 и 7 (используется алгоритм Дейкстры).

> $DijkstrasAlgorithm(G, 1, 7)$;

$$[[1, 2, 5, 7], 13]$$

Зададим подграф кратчайшего пути перечислением ребер и выполним рисунок графа с уже выделенным подграфом.

> $restart$

> $with(GraphTheory)$:

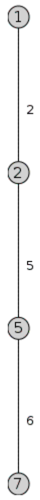
> $E := \{[\{1,2\},2], [\{2,5\},5], [\{5,7\},6]\}$;

$$E := \{[\{1,2\},2],[\{2,5\},5],[\{5,7\},6]\}$$

> $G := Graph(E);$

$$G := Graph\ 1\text{: an undirected weighted graph with 4 vertices and 3 edge(s)}$$

> $DrawGraph(G);$



Задача нахождения кратчайшего пути в графе решена полностью.

Список литературы:

1. Горюшкин А.П. Машинное решение задач дискретной математики// Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (3). С. 58 – 68

2. Кирсанов М.Н. Графы в Maple. Задачи, алгоритмы, программы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 168 с.

3. Смагин Б.И. Экономико-математические методы: учебник для академического бакалавриата. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2017. 272с.

UDC 519.17

THE TASK OF CHOOSING THE SHORTEST PATH

Boris I. Smagin

doctor of economics, professor

bismagin2023@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University,
Michurinsk, Russia

Abstract. In practical applications, the task of finding the shortest path between two vertices of a connected undirected graph is of great importance, which reduces many problems to choosing the most economical route, many problems of choosing the most economical way to transfer a dynamic system from one state to another, etc. A number of methods for solving such problems have been developed, and very often methods based on theory graphs turn out to be the least time-consuming.

The algorithm for solving this problem is considered using a specific example, with graphical constructions and the use of Dijkstra's algorithm performed using the symbolic mathematics package Maple.

Keywords: connected undirected graph, shortest path selection, symbolic mathematics package Maple, Dijkstra algorithm.

Статья поступила в редакцию 10.09.2025; одобрена после рецензирования 20.10.2025; принята к публикации 31.10.2025.

The article was submitted 10.09.2025; approved after reviewing 20.10.2025; accepted for publication 31.10.2025.