

УДК 517.0 (075.8)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЕМОВ ТЕЛ

Борис Игнатьевич Смагин

Доктор экономических наук, профессор

bismagin2023@mail.ru

Мичуринский государственный аграрный университет

г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Двойной интеграл находит самое широкое применение в различных сферах научного исследования, причем одним из важных направлений является вычисление объемов тел. В статье рассмотрены алгоритмы вычисления объемов тел в трехмерном пространстве.

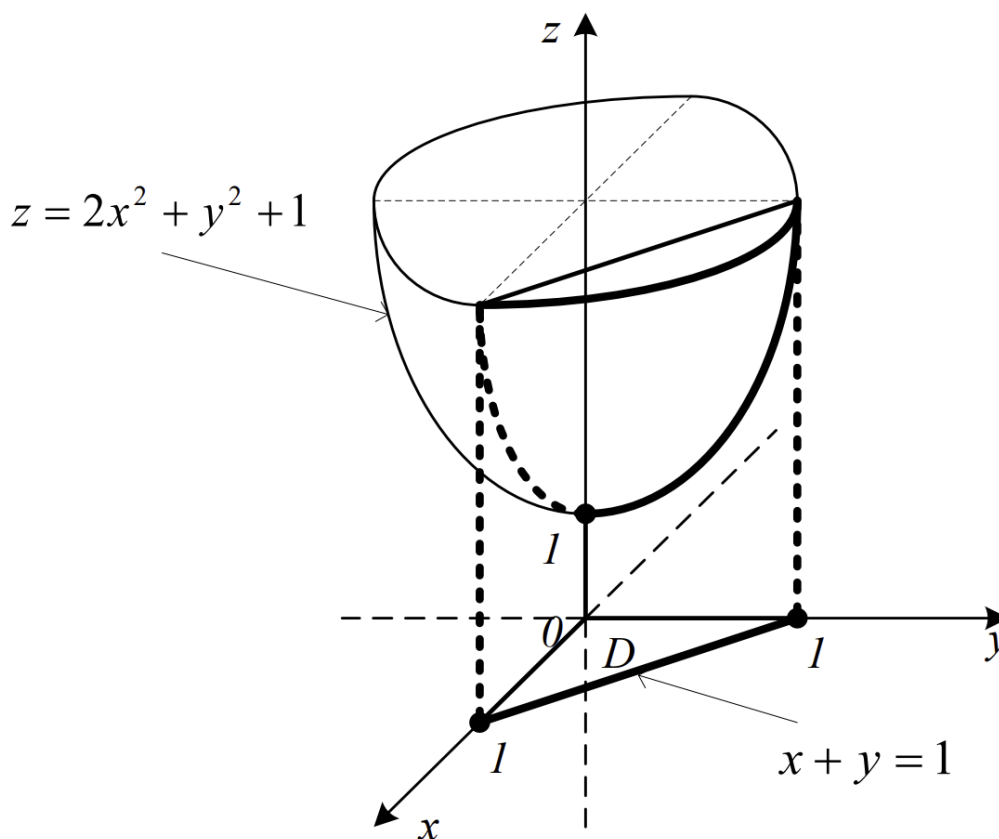
Ключевые слова: двойной интеграл, объем трехмерного объекта, правильная область интегрирования, вычислительные аспекты.

Объём V цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D , выражается формулой [1,2,3]:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (1)$$

Задача 1. Найти объём тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 2x^2 + y^2 + 1$, плоскостью $x + y = 1$ и координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Данное тело ограничено сверху эллиптическим параболоидом $z = 2x^2 + y^2 + 1$ с вершиной $(0, 0, 1)$ и вытянутого в положительном направлении оси Oz ; снизу плоскостью $z = 0$; с боков координатными плоскостями Oxz ($y = 0$) и Oyz ($x = 0$), а также плоскостью $x + y = 1$, параллельной оси Oz . Областью интегрирования D является треугольник на плоскости Oxy , образованный прямыми $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

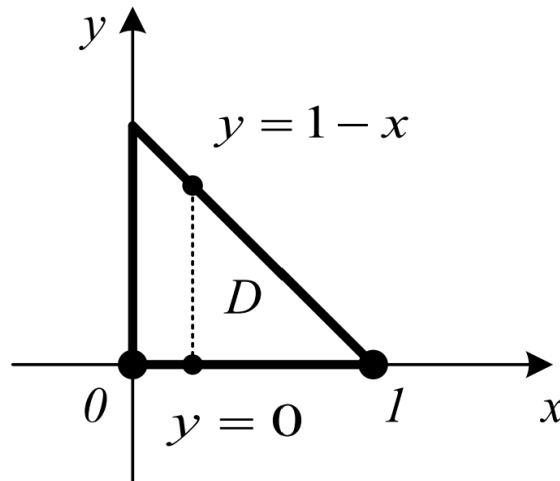


Тогда по формуле (1)

$$V = \iint_D (2x^2 + y^2 + 1) dx dy$$

Область интегрирования D является правильной в направлении оси Oy . Тогда для неё x изменяется от 0 до 1; y изменяется от прямой $y = 0$ до прямой $y = 1 - x$, то есть

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\}$$



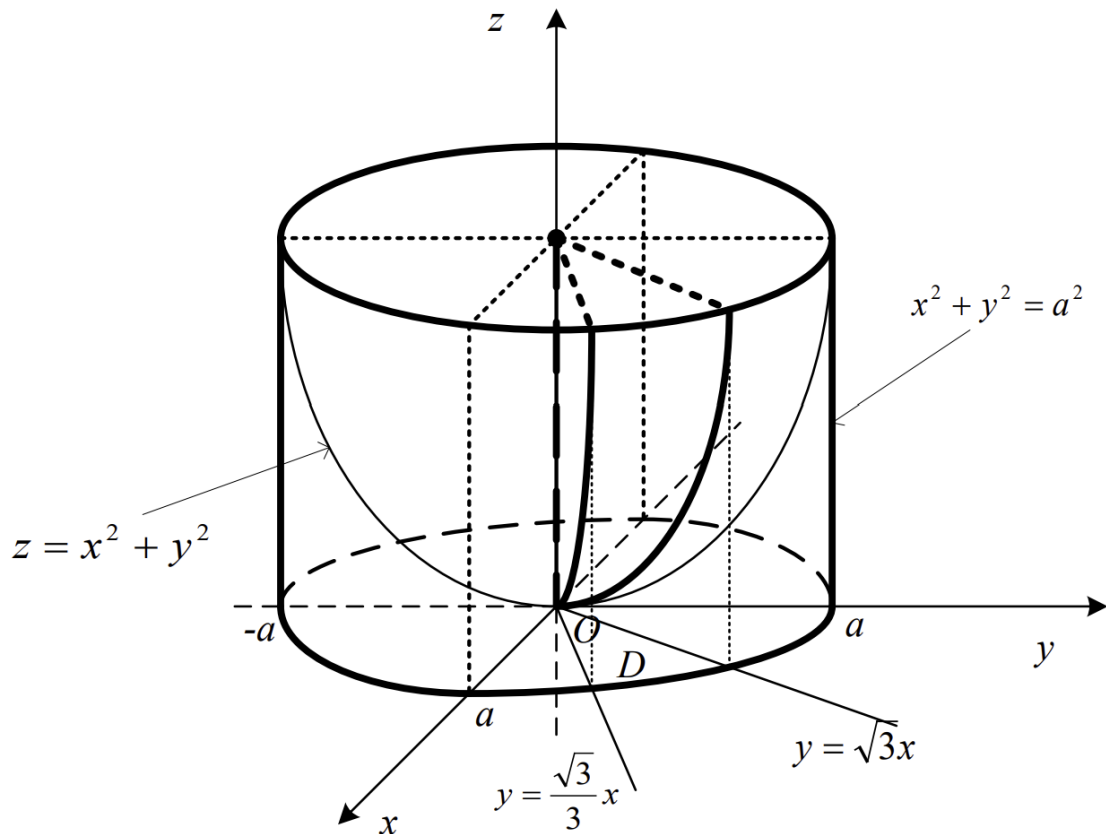
Расставляя пределы интегрирования, находим

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1) dy = \int_0^1 \left((2x^2 + 1)y + \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left((2x^2 + 1)(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} - 2x + 3x^2 - \frac{7}{3}x^3 \right) dx = \\ &= \left(\frac{4}{3}x - x^2 + x^3 - \frac{7}{12}x^4 \right) \bigg|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{7}{12} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Задача 2. Найти объём тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = x^2 + y^2$, цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, координатной плоскостью $z = 0$, плоскостями $3y = \sqrt{3} \cdot x$, $y = \sqrt{3} \cdot x$ ($x \geq 0$).

Решение. Данное тело ограничено сверху эллиптическим параболоидом $z = x^2 + y^2$ с вершиной $(0, 0, 0)$, вытянутого в положительном направлении оси Oz ; снизу плоскостью $z = 0$ и вырезаемой на ней окружностью $x^2 + y^2 = a^2$; с боков

плоскостями $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot x$ и $y = \sqrt{3} \cdot x$, параллельными оси Oz. Областью интегрирования D является круговой сектор радиуса a на плоскости Oxy, образованный прямыми $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot x$ и $y = \sqrt{3} \cdot x$



Тогда по формуле (1), переходя к полярным координатам, получим

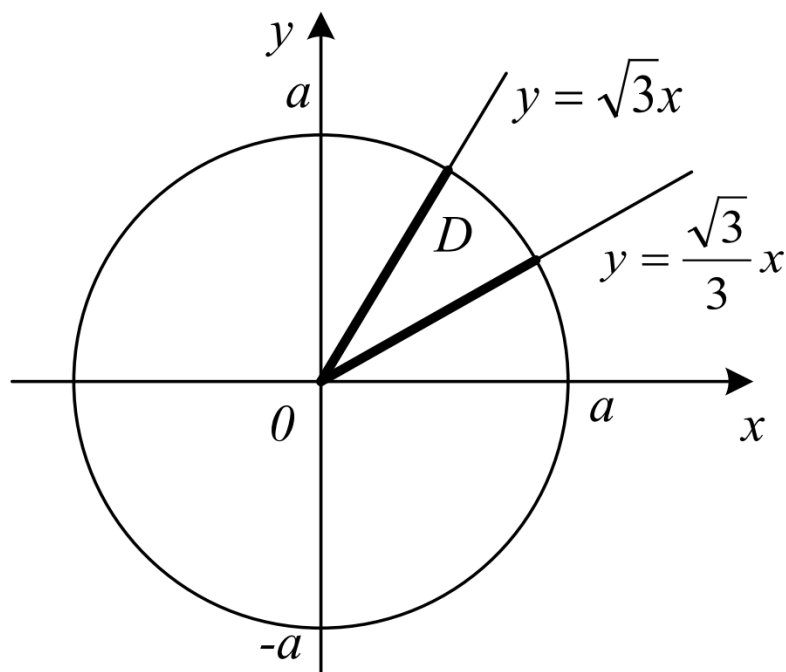
$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ dx dy = r dr d\varphi \end{array} \right] = \iint_{D'} r^3 dr d\varphi.$$

Для области D находим изменение угла φ из уравнений прямых:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} x \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$y = \sqrt{3} x \rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Итак, для области D угол φ изменяется от $\pi/6$ до $\pi/3$; радиус r изменяется от 0 до a , то есть



$$D = \left\{ (r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq a; \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Следовательно,

$$V = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{\pi a^4}{24}.$$

Список литературы:

1. Богомолова Е.В. Кратные интегралы и их приложения: учебное пособие. Дубна: Гос. ун-т «Дубна», 2019. 97с.
2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Том 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. М.: МЦНМО, 2018. 256с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов: в 3-х томах. Том 3. СПб.: Лань, 2024. 656с.

UDC 517.0 (075.8)

USING DOUBLE INTEGRALS TO CALCULATE THE VOLUMES OF BODIES

Boris I. Smagin

Doctor of Economics, Professor

bismagin2023@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University

Michurinsk, Russia

Abstract. The double integral is widely used in various fields of scientific research, and one of the important areas is the calculation of body volumes. The article discusses algorithms for calculating the volumes of bodies in three-dimensional space.

Keywords: double integral, volume of a three-dimensional object, correct integration domain, computational aspects.

Статья поступила в редакцию 10.05.2025; одобрена после рецензирования 20.06.2025; принята к публикации 30.06.2025.

The article was submitted 10.05.2025; approved after reviewing 20.06.2025; accepted for publication 30.06.2025.