

УДК 517.0 (075.8)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

Борис Игнатьевич Смагин

доктор экономических наук, профессор

bismagin2023@mail.ru

Мичуринский государственный аграрный университет

г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Двойной интеграл находит самое широкое применение в различных сферах научного исследования, причем одним из важных направлений является вычисление площадей гладких поверхностей. В статье рассмотрены алгоритмы, основанные на использовании декартовой системы координат и осуществлен переход к полярной системе координат.

Ключевые слова: двойной интеграл, декартовы координаты, полярные координаты, площадь поверхности гладкой фигуры.

Если гладкая поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$ и D – проекция данной поверхности на плоскость Oxy , то площадь поверхности выражается формулой [1,2,3]:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (1)$$

Задача 1. Найти площадь поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, расположенную внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

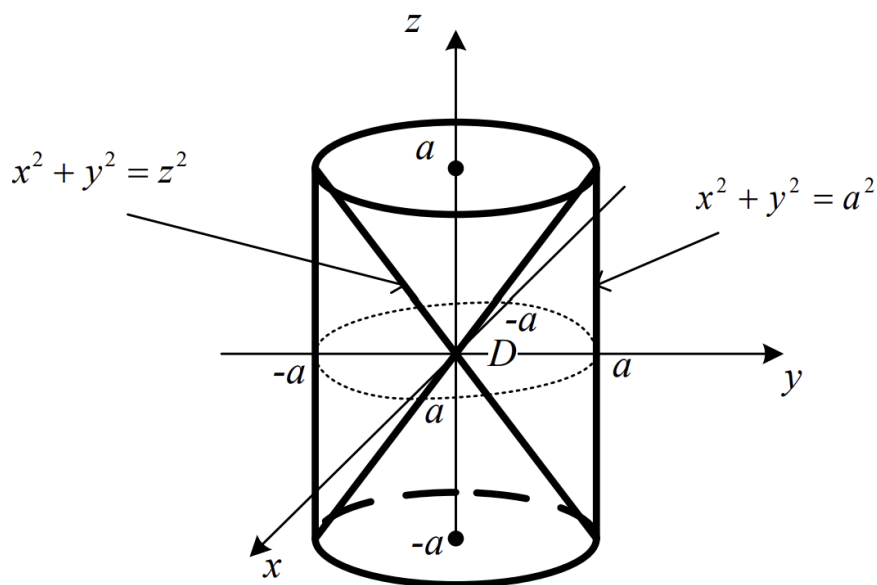
Решение. В силу симметричности поверхности относительно плоскости Oxy будем вычислять площадь верхней части поверхности при $z \geq 0$, а результат удваивать. Из уравнения конуса имеем для верхней части:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Отсюда

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

Проекцией D поверхности конуса на плоскость Oxy является круг $x^2 + y^2 = a^2$ с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом $R = a$. Тогда по формуле (1) получим



$$S_{\text{верх}} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{2} dx dy.$$

Переходя к полярным координатам, находим

$$S_{\text{верх}} = \sqrt{2} \iint_D r dr d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot a^2.$$

Следовательно, площадь всей поверхности

$$S = 2S_{\text{верх}} = 2\sqrt{2}\pi a^2.$$

Задача 2. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = ay$

Решение. В силу симметричности поверхности относительно плоскости Оху будем вычислять площадь верхней части поверхности при $z \geq 0$, а результат удваивать. Из уравнения сферы имеем для верхней части:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

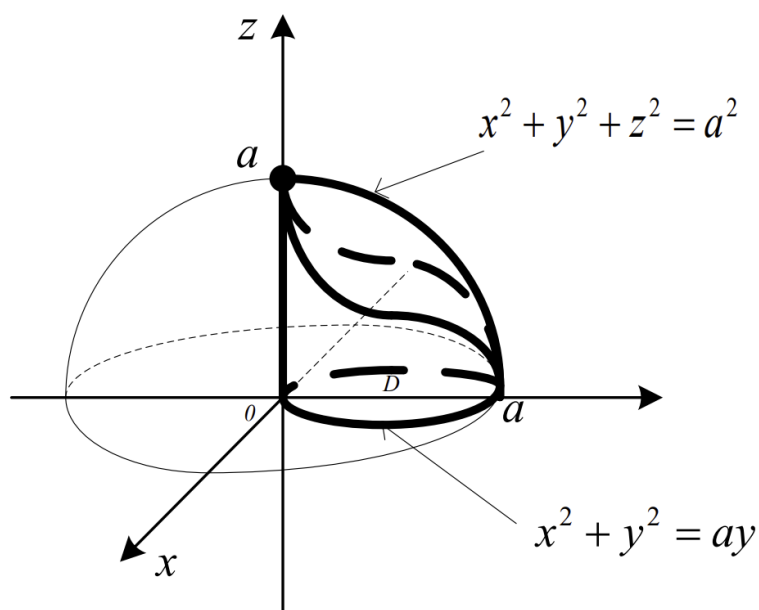
Отсюда

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Проекцией D поверхности сферы на плоскость Оху является круг $x^2 + y^2 = ay$. Выделяя здесь полный квадрат по у, получим

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Это круг с центром в точке $(0, a/2)$ и радиусом $R = a/2$.



Тогда по формуле (1) получим

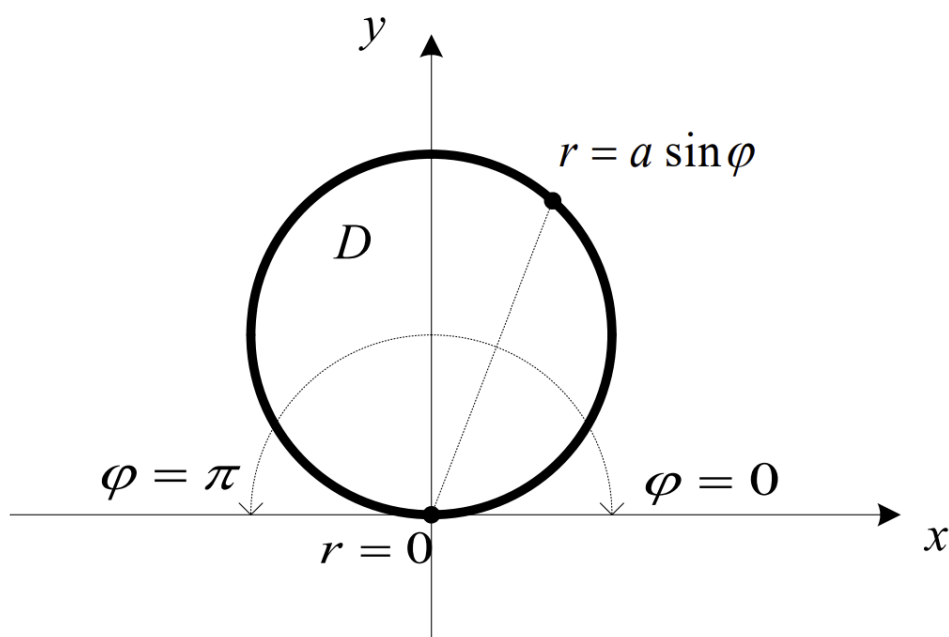
$$S_{\text{верх}} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Переходя к полярным координатам, находим уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = ay, r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = ar \sin \varphi, r = a \sin \varphi.$$

Для области D угол φ изменяется от 0 до π ; r изменяется от 0 до окружности $r = a \sin \varphi$, то есть

$$D = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq r \leq a \sin \varphi\}.$$



Тогда

$$\begin{aligned} S_{\text{верх}} &= a \iint_D \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = a \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a \sin \varphi} \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{a}{2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a \sin \varphi} \frac{d(r^2)}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \\ &= -\frac{a}{2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a \sin \varphi} \frac{d(a^2 - r^2)}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\frac{a}{2} \int_0^\pi 2\sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^{a \sin \varphi} d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 - |\cos \varphi|) d\varphi = \\ &= 2a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi) d\varphi = 2a^2 (\varphi - \sin \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = 2a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = a^2 (\pi - 2). \end{aligned}$$

Следовательно, площадь всей поверхности

$$S = 2S_{\text{верх}} = 2a^2 (\pi - 2).$$

Список литературы

1. Богомолова Е.В. Кратные интегралы и их приложения: учебное пособие. Дубна: Гос. ун-т «Дубна», 2019. 97с.
2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Том 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. М.: МЦНМО, 2018. 256с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов: в 3-х томах. Том 3. СПб.: Лань, 2024. 656с.

UDC 517.0 (075.8)

USING DOUBLE INTEGRALS TO CALCULATE THE SURFACE AREA

Boris I. Smagin

Doctor of Economics, Professor

bismagin2023@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University,

Michurinsk, Russia

Abstract. The double integral is widely used in various fields of scientific research, and one of the important directions is the calculation of the areas of smooth surfaces. The article discusses algorithms based on the use of the Cartesian coordinate system and makes the transition to the polar coordinate system.

Keywords: double integral, Cartesian coordinates, polar coordinates, surface area of a smooth figure.

Статья поступила в редакцию 10.05.2025; одобрена после рецензирования 20.06.2025; принята к публикации 30.06.2025.

The article was submitted 10.05.2025; approved after reviewing 20.06.2025; accepted for publication 30.06.2025.