

УДК 517.0 (075.8)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Борис Игнатьевич Смагин

доктор экономических наук, профессор

bismagin2023@mail.ru

Мичуринский государственный аграрный университет

г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Двойной интеграл находит самое широкое применение в различных сферах научного исследования, причем одним из важных направлений является вычисление площадей плоских фигур. В статье рассмотрены алгоритмы, основанные на использовании декартовой и полярной систем координат.

Ключевые слова: двойной интеграл, декартовы координаты, полярные координаты, площадь плоской фигуры.

Площадь S квадратуемой области D на плоскости Oxy выражается формулой [1,2,3]:

$$S = \iint_D dx dy. \quad (1)$$

В полярных координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ формула площади примет вид

$$S = \iint_D r dr d\varphi. \quad (2)$$

Задача 1. Найти площадь области, ограниченной кривыми $y^2 = 4ax + 4a^2$ и $x + y = 2a$ ($a > 0$).

Решение. Находим координаты точек пересечения заданных кривых, решая систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4ax + 4a^2, \\ x + y = 2a. \end{cases}$$

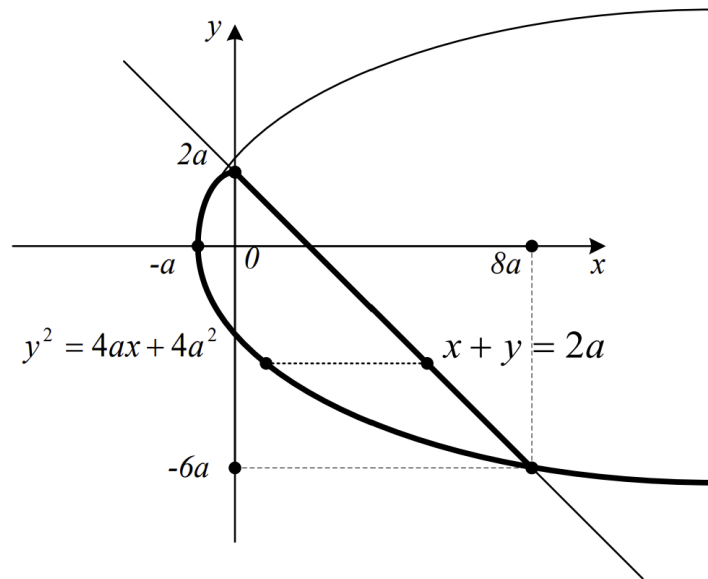
Выражая из второго уравнения $y = 2a - x$ и подставляя в первое уравнение, получим

$$y^2 = 4a(2a - y) + 4a^2 \rightarrow y^2 + 4ay - 12a^2 = 0.$$

Находим дискриминант $D = 16a^2 + 48a^2 = 64a^2$, тогда

$$y_1 = \frac{-4a + 8a}{2} = 2a; \quad y_2 = \frac{-4a - 8a}{2} = -6a.$$

При этом $x_1 = 2a - y_1 = 0$; $x_2 = 2a - y_2 = 8a$. Итак, точки пересечения $A(0, 2a); B(8a, -6a)$.



По формуле (1) имеем $S = \iint_D dx dy$.

Область D является правильной в направлении оси OX . Для области D y изменяется от $-6a$ до $2a$; x изменяется от параболы $x = y^2 - 4a^2 / 4a$ до прямой $x = 2a - y$, то есть

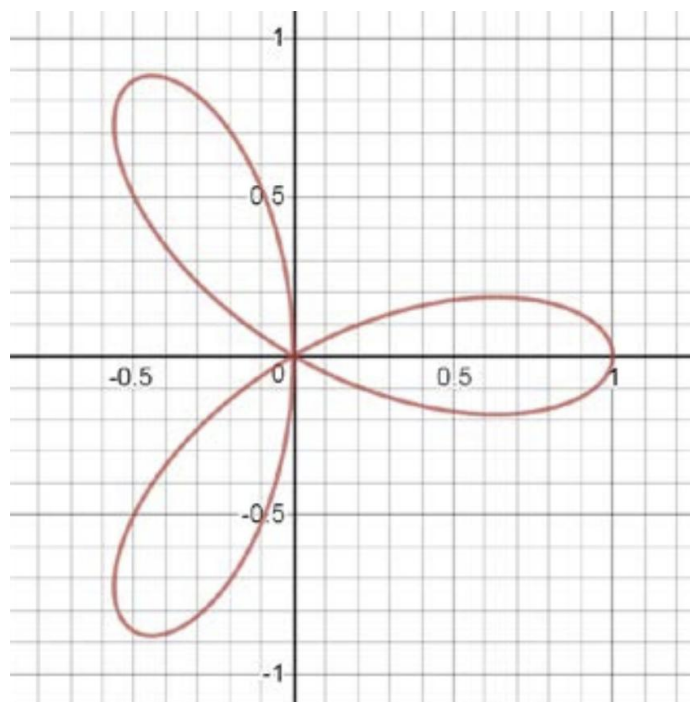
$$D = \left\{ (x, y) \mid -6a \leq y \leq 2a; \frac{y^2 - 4a^2}{4a} \leq x \leq 2a - y \right\}.$$

Расставляя пределы интегрирования, находим

$$\begin{aligned} S &= \int_{-6a}^{2a} dy \int_{(y^2 - 4a^2)/4a}^{2a - y} dx = \int_{-6a}^{2a} (x) \Big|_{(y^2 - 4a^2)/4a}^{2a - y} dy = \int_{-6a}^{2a} \left(2a - y - \frac{y^2 - 4a^2}{4a} \right) dy = \\ &= \int_{-6a}^{2a} \left(3a - y - \frac{y^2}{4a} \right) dy = 3a \int_{-6a}^{2a} dy - \int_{-6a}^{2a} y dy - \frac{1}{4a} \int_{-6a}^{2a} y^2 dy = \\ &= 3a(y) \Big|_{-6a}^{2a} - \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-6a}^{2a} - \frac{1}{4a} \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-6a}^{2a} = 3a(2a + 6a) - \frac{1}{2}(4a^2 - 36a^2) - \\ &\quad - \frac{1}{12a}(8a^3 + 216a^3) = 24a^2 + 16a^2 - \frac{56}{3}a^2 = \frac{64}{3}a^2. \end{aligned}$$

Задача 2. Найти площадь области, ограниченной кривой $r = a \cos 3\varphi$.

Решение. Границей области является трёхлепестковая роза $r = a \cos 3\varphi$.
Найдём промежуток изменения угла φ для каждого лепестка. Для этого решим неравенство $\cos 3\varphi \geq 0$.



Отсюда $-\pi/2 + 2\pi n \leq 3\varphi \leq \pi/2 + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$-\pi/6 + 2\pi n/3 \leq \varphi \leq \pi/6 + 2\pi n/3.$$

Первый лепесток получается при

$$n = 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6};$$

– второй при

$$n = 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6};$$

– третий при

$$n = 2 \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{7\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Будем искать площадь одного лепестка по формуле (2)

$$S_1 = \iint_{D_1} r dr d\varphi.$$

Для области D_1 угол φ изменяется от $-\pi/6$ до $\pi/6$; r изменяется от 0 до кривой $r = a \cos 3\varphi$, то есть

$$D_1 = \left\{ (r, \varphi) \mid -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}; 0 \leq r \leq a \cos 3\varphi \right\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int_0^{a \cos 3\varphi} r dr = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{a \cos 3\varphi} d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\varphi d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} d\varphi = \frac{a^2}{4} \left(\varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{12}. \end{aligned}$$

Окончательно находим площадь всей области

$$S = 3 \cdot S_1 = 3 \cdot \pi a^2 / 12 = \pi a^2 / 4.$$

Задача 3. Найти площадь области, ограниченной кривыми

$$r = a(1 + \cos \varphi) \text{ и } r = a \cos \varphi.$$

Решение. Границей области являются кардиоида $r = a(1 + \cos \varphi)$ и окружность $r = a \cos \varphi$ с центром в точке $(a/2, 0)$ и радиусом $R = a/2$. Находим точки пересечения кардиоиды с осями координат. Подставляя $\varphi = 0$ в уравнение кардиоиды, получим

$$r = a(1 + \cos 0) = 2a.$$

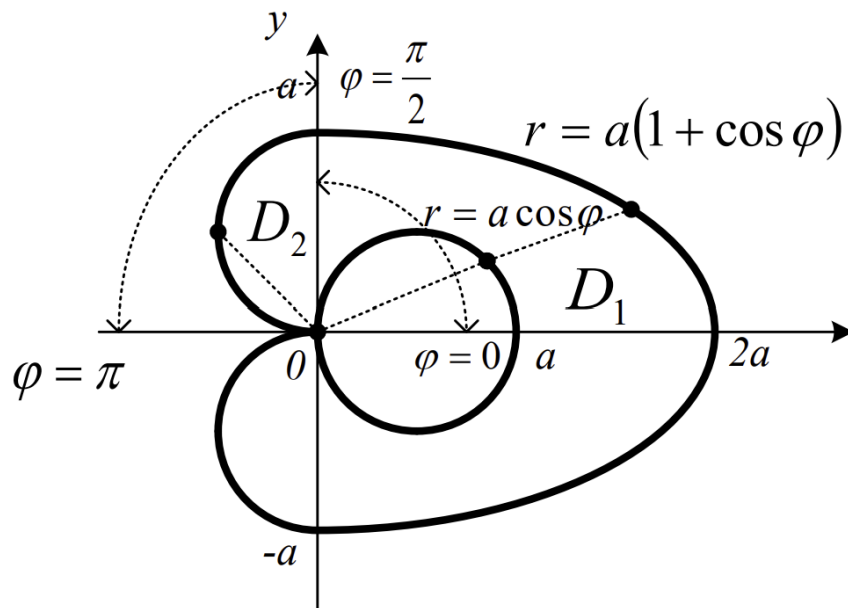
Аналогично, подставляя

$$\varphi = \pi/2 \Rightarrow r = a(1 + \cos \pi/2) = a;$$

$$\varphi = \pi \Rightarrow r = a(1 + \cos \pi) = 0;$$

$$\varphi = -\pi/2 \Rightarrow r = a(1 + \cos (-\pi/2)) = a.$$

По этим точкам строим кардиоиду.



Преобразуем уравнение окружности, умножая его на r :

$$r = a \cos \varphi \Rightarrow r^2 = a r \cos \varphi.$$

Переходя к декартовым координатам, заменяем

$$r^2 = x^2 + y^2; r \cos \varphi = x, \text{ получим}$$

$x^2 + y^2 = ax$. Выделяя полный квадрат по переменной x , находим

$$(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(a/2, 0)$ и радиусом $R = a/2$.

Тогда площадь области будем вычислять по формуле (2)

$$S = \iint_D r dr d\varphi.$$

где область D расположена между окружностью и кардиоидой и является симметричной относительно оси Ox . Будем находить площадь верхней части области (при $x \geq 0$), а результат удваивать. Разобьём верхнюю половину области D на две части: D_1 в первой четверти и D_2 во второй четверти. В силу аддитивности имеем

$$S_{\text{верх}} = \iint_{D_1} r dr d\varphi + \iint_{D_2} r dr d\varphi.$$

Для области D_1 угол φ изменяется от 0 до $\pi/2$; r изменяется от окружности $r = a \cos \varphi$ до кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$, то есть

$$D_1 = \left\{ (r, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; a \cos \varphi \leq r \leq a(1 + \cos \varphi) \right\}.$$

Для области D_2 φ изменяется от $\pi/2$ до π ; r изменяется от 0 до кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$, то есть

$$D_2 = \left\{ (r, \varphi) \mid \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq r \leq a(1 + \cos \varphi) \right\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{\text{верх}} &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^{a(1+\cos \varphi)} r dr + \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r dr = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_{a \cos \varphi}^{a(1+\cos \varphi)} d\varphi + \\ &+ \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{a(1+\cos \varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(a^2 (1 + \cos \varphi)^2 - a^2 \cos^2 \varphi \right) d\varphi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos \varphi) d\varphi + \\ &+ \frac{a^2}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} (\varphi + 2 \sin \varphi) \Big|_0^{\pi/2} + \\ &+ \frac{a^2}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \left(1 + 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) + \\ &+ \frac{a^2}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) + \\ &+ \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \right) = \frac{5\pi}{8} a^2. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$S = 2S_{\text{верх}} = a^2 5\pi/4$$

Список литературы

1. Богомолова Е.В. Кратные интегралы и их приложения: учебное пособие. Дубна: Гос. ун-т «Дубна», 2019. 97с.

2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Том 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. М.: МЦНМО, 2018. 256с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов: в 3-х томах. Том 3. СПб.: Лань, 2024. 656с.

UDC 517.0 (075.8)

GEOMETRIC APPLICATIONS OF DOUBLE INTEGRALS: CALCULATING THE AREA OF A FLAT AREA

Boris I. Smagin

doctor of economics, professor

bismagin2023@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University

Michurinsk, Russia

Abstract. The double integral is widely used in various fields of scientific research, and one of the important areas is the calculation of the areas of flat shapes. The article discusses algorithms based on the use of Cartesian and polar coordinate systems.

Keywords: double integral, Cartesian coordinates, polar coordinates, area of a flat figure.

Статья поступила в редакцию 10.05.2025; одобрена после рецензирования 20.06.2025; принята к публикации 30.06.2025.

The article was submitted 10.05.2025; approved after reviewing 20.06.2025; accepted for publication 30.06.2025.