УДК 517.0 (075.8)

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Борис Игнатьевич Смагин
доктор экономических наук, профессор
bismagin2023@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Двойной интеграл находит самое широкое применение в различных сферах научного исследования. Замена переменных позволяет упростить вычисление двойного интеграла. В статье рассмотрены алгоритмы, основанные на применении якобиана и перехода к полярным и обобщенным полярным координатам, позволяющие в зависимости от специфики поставленной задачи существенно упростить процедуру вычислений двойных интегралов.

Ключевые слова: двойной интеграл, границы интегрирования, якобиан, полярные координаты, обобщенные полярные координаты.

Пусть функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ осуществляют взаимно однозначное отображение области D' плоскости $O'uv$ на область D плоскости Оху, имеют в D' непрерывные частные производные 1-го порядка и отличный от нуля якобиан (определитель из производных) [1-4].

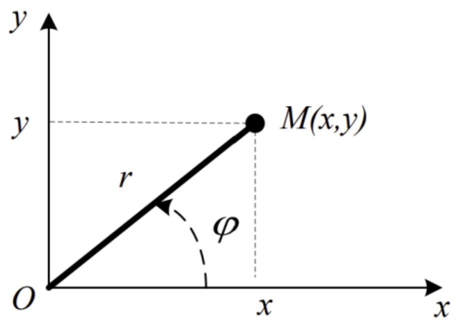
$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда при условии существования двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ справедлива формула замены переменных:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J|dudv \qquad (1)$$

Переход к полярным координатам [1-3]

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка на плоскости Оху. Полярными координатами точки М называется пара чисел (r, φ), где $r = |\overrightarrow{OM}|$ – длина радиус-вектора $|\overrightarrow{OM}|$; φ – угол между положительным направлением оси Ох и радиус-вектором $|\overrightarrow{OM}|$.



Переход от прямоугольных координат (x, y) к полярным координатам (r, φ) задаётся формулами

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi. \qquad (2)$$

Здесь $r \geq 0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$. Якобиан примет вид

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} & \dfrac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} & \dfrac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r.$$

Формула замены (1) запишется в виде

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi \qquad (3)$$

<u>Задача 1.</u> Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ если область D ограничена кривыми $x^2+y^2=1$, $y=x$ $(y\geq x)$, $x=0$ $(x\geq 0)$.

<u>Решение.</u> Применяя формулу (3), получим

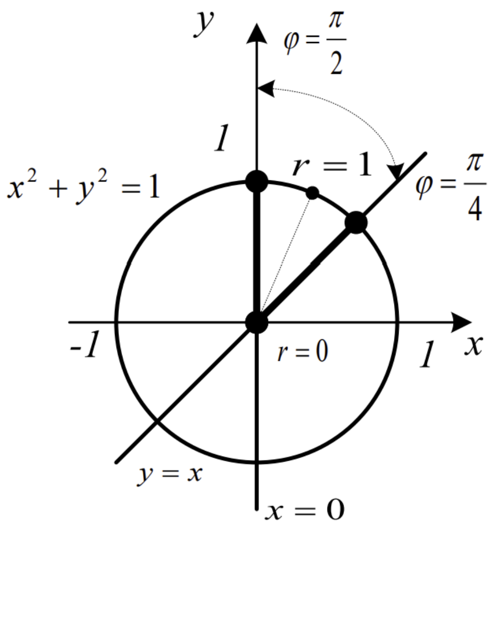
$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\begin{bmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ dxdy=rdrd\varphi\end{bmatrix}=\iint\limits_{D'}\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\;rdrd\varphi=$$

$$=\iint\limits_{D'}\sqrt{r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}\;rdrd\varphi=\iint\limits_{D'}r^2drd\varphi.$$

Уравнение окружности $x^2+y^2=1$ преобразуется по формулам (2) к виду

$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=1\Longrightarrow r^2=1,\text{ то есть } r=1.$$

Поэтому областью интегрирования является круговой сектор, ограниченный осью OY и биссектрисой первой четверти.

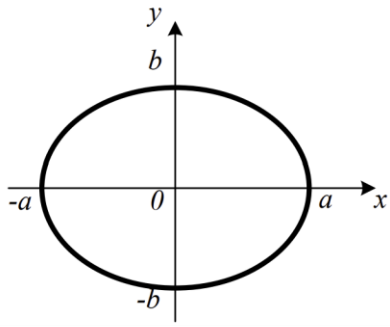


Отсюда угол φ изменяется от $\pi/4$ до π/2; радиус r изменяется от 0 до 1, то есть

$$D' = \left\{ (r,\varphi) \middle| \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1 \right\}. \Rightarrow$$

$$\iint_{D'} r^2 dr d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^1 d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{3} d\varphi = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

Задача 2. Вычислить интеграл $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2}{y^2}}}$, если область D ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$



Решение. Перейдём к обобщённым полярным координатам r и φ по формулам

$x = a$r cos φ, $y = b$r sin φ. Тогда якобиан примет вид

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial(ar\cos\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(ar\cos\varphi)}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial(br\sin\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(br\sin\varphi)}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ra\sin\varphi \\ b\sin\varphi & rb\cos\varphi \end{vmatrix} = abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi = abr.$$

Уравнение эллипса запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{(ar\cos\varphi)^2}{a^2} + \frac{(br\sin\varphi)^2}{b^2} = 1 \to r^2 = 1,$$

то есть $r = 1$.

Значит, область интегрирования определяется соотношениями

$$D' = \left\{ (r, \varphi) \middle| \, 0 \le \varphi \le 2\pi; \, 0 \le r \le 1 \right\}.$$

Таким образом, получим

$$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \begin{bmatrix} x = ar\cos\varphi \\ y = ar\sin\varphi \\ dxdy = abrdrd\varphi \end{bmatrix} = \iint\limits_{D'} \frac{abrdrd\varphi}{\sqrt{c^2 - r^2}} = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{c^2 - r^2}}.$$

Интегралы являются независимыми, следовательно, их можно вычислять отдельно друг от друга.

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi; \quad \int\limits_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{c^2 - r^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d\left(c^2 - r^2\right)}{\sqrt{c^2 - r^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(2\sqrt{c^2 - r^2}\right)\Big|_0^1 = c - \sqrt{c^2 - 1}.$$

Окончательно получим

$$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2}{y^2}}} = 2\pi ab\left(c - \sqrt{c^2 - 1}\right).$$

Список литературы:

1. Богомолова Е.В. Кратные интегралы и их приложения: учебное пособие. Дубна: Гос. ун-т «Дубна». 2019. 97с.

2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Том 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. М.: МЦНМО. 2018. 256с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов: в 3-х томах. Том 3. СПб.: Лань. 2024. 656с.

4. Смагин Б.И. Двойные интегралы с переменными границами интегрирования // Наука и Образование. 2025. Т.8. №1.

UDC 517.0 (075.8)

SUBSTITUTION OF VARIABLES IN THE DOUBLE INTEGRAL

Boris Ig. Smagin
doctor of economics, professor
bismagin2023@mail.ru
Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Abstract. The double integral is widely used in various fields of scientific research. Swapping variables makes it easier to calculate the double integral. The article discusses algorithms based on the application of the Jacobian and the transition to polar and generalized polar coordinates, which, depending on the specifics of the task, significantly simplify the procedure for calculating double integrals.

Keywords: double integral, integration boundaries, Jacobian, polar coordinates, generalized polar coordinates.

Статья поступила в редакцию 10.05.2025; одобрена после рецензирования 20.06.2025; принята к публикации 30.06.2025.

The article was submitted 10.05.2025; approved after reviewing 20.06.2025; accepted for publication 30.06.2025.