УДК 378.147.227

О РАЗДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Наталья Александровна Гарминович
кандидат физико-математических наук, доцент
krasaverenei@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. В статье проводится анализ использования метода разделения переменных для уравнения в частных производных с определенными условиями. Исследуется возможность точного выражения решения задачи Коши для уравнения Шредингера через решения классических задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, разделение переменных.

Одним из методов исследования уравнений математической физики является метод разделения переменных. Практически все известные точные решения линейных дифференциальных уравнений с частными производными найдены этим методом. В случае гамильтонианов осцилляторного типа представляется уникальная возможность точного выражения решения задачи Коши для уравнения Шредингера [2] через решения классических задач о поведении одного или нескольких осцилляторов при параметрическом изменении частоты и при воздействии внешней силы. Эта возможность может реализоваться методами группового анализа.

В случае одной частицы в постоянном внешнем поле изменение волновой функции описывается уравнением, выведенным Эрвином Шредингером в 1926 году:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x), \tag{1}$$

где $\Delta=\sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$ - оператор Лапласа, $V(x)$- потенциальная энергия частицы во внешнем поле, $\psi(x,\ \ t)$- волновая функция, $\hbar$ - постоянная Планка.

Уравнение Шредингера как метод решения квантомеханических задач считается весьма удобным и продуктивным. Но, как известно, большинство задач, сводящихся к уравнению Шредингера, могут быть решены только приближенно.

Как было показано Р. Фейнманом в 1948 г., для определения волновой функции можно ввести континуальное интегрирование, то есть интегрирование по всем возможным траекториям частицы: волновая функция равна сумме или интегралу по всем возможным значениям пространственной переменной.

В общем случае такой континуальный интеграл вычислен быть не может. Но в ряде случаев формула становится точной. Это утверждение справедливо, если лагранжиан является квадратичной формой от переменных x и p: для уравнения Шредингера с постоянной частотой и переменной внешней силой методами континуального интегрирования найдено точное решение.

Один из важных моментов для квадратичных гамильтонианов состоит в следующем: может быть найдено представление волновой функции, не содержащее ни функционального, ни обычного интегрирования по пространственным переменным x.

В работах В.С. Попова, А.М. Дыхне и некоторых других исследователей приведено преобразование координат и функции, сводящее одномерное уравнение Шредингера для осциллятора с переменной частотой $\omega(t)$ к решению уравнения движения для классического осциллятора. Этот важный результат, широко используемый в различных областях теоретической физики, имеет принципиальное научное значение, так как он демонстрирует построение точных решений квантовой задачи через решения соответствующих задач классической механики, минуя технику фейнмановского функционального интегрирования [2].

С точки зрения дифференциальных уравнений он также представляет большой интерес, так как дает пример преобразования, позволяющего свести задачу Коши для уравнения параболического типа к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений» [2]. Отметим, что все эти результаты были получены до чисто математических исследований, связанных с изучением групповых свойств уравнений с частными производными.

В работе Г.В. Дубровского [3] была поставлена аналогичная задача о многомерном анизотропном осцилляторе, находящемся под действием внешней силы $f(t)$ с переменной функцией связи координат $C(t)$, подчиняющейся лишь естественным граничным условиям. Потенциал имеет вид:

$$V(x,\quad t) = -f(t)x - x^{'}C(t)x + \omega^2(t)x^2 \qquad (2)$$

Методом фейнмановских интегралов было получено точное выражение для S - матрицы через решение классической задачи о связанных осцилляторах с граничными условиями. Вопрос о волновой функции и соответствующего преобразования координат и решений, позволяющих свести задачу Коши для многомерного уравнения Шредингера к соответствующей задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается в работе

Гарминович Н.А. [2], где устанавливается связь квантовой и классической механик в многомерных задачах, основанная на групповых свойствах дифференциальных уравнений. Изучение решения задачи Коши с квадратичным гамильтонианом с групповой точки зрения позволяет определить классическое, а не обобщенное решение, то есть функцию, имеющую на всей области определения гладкие ψ_t и ψ_{xx}.

Определение преобразований координат и функции, переводящих сложную задачу к интегрируемому виду, решение которого удовлетворяет поставленным начальным условиям основано на изучении группы эквивалентности, допускаемой данными уравнением и начальным условием [2]. Постановка общей проблемы исследования групповых свойств дифференциальных уравнений принадлежит норвежскому математику Софусу Ли. Само понятие непрерывной группы преобразований первоначально возникло у С. Ли в связи с изучением методов интегрирования обыкновенных классов ОДУ. Оказалось, что групповой подход дает возможность описать все эти методы с единой точки зрения. Основная идея, позволившая решать задачи нахождения преобразований координат и функции, состоит в линеаризации сложных нелинейных условий относительно преобразований из группы и основана на доказанных Ли теоремах о соответствиях между группами преобразований и алгебрами операторов. В работе Биркгофа [1] по гидродинамике, была поставлена проблема приложения понятия группы к изучению дифференциальных уравнений в частных производных. Первое систематическое исследование вопросов, связанных с отысканием классов частных решений путем изучения групповых свойств дифференциальных уравнений, было выполнено Л.В. Овсянниковым в его докторской диссертации.

В последующих работах Л.В. Овсянникова и Н.Х. Ибрагимова теория непрерывных групп получает полное развитие [4]. Известно, что определению инфинитезимальных групп преобразований линейного уравнения Шредингера с квадратичным гамильтонианом посвящены работы U. Niederer, в работе которого определены преобразования функции только для случаев определенной зависимости потенциала от времени [2].

Знание группы симметрии уравнения с частными производными не помогает найти общее решение этого уравнения / как это имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений, если известен универсальный инвариант группы [4].

Разделение переменных в уравнении Шредингера с квадратичным потенциалом / в том числе и нестандартным / с помощью полных наборов дифференциальных операторов симметрии, содержащих операторы не выше второго порядка, демонстрируются в работах В.Н. Шаповалова [5]. Коэффициенты связи операторов, допускаемых эквивалентными уравнениями, определяют условия перевода уравнения в систему координат, в которой уравнение допускает разделение переменных. Преобразования координат и функции, отвечающие этому переходу, удовлетворяют условиям:

$$g(t. \quad x) = \left(\frac{df}{dt} \succ 0, \quad a_{ij}(t)x^j + b_i(t) \right), \tag{3}$$

функция f принадлежит группе преобразований эквивалентности данного уравнения, $a_{ij}(t)$- произвольная ортогональная матрица,

$b_i(t)$- произвольная функция времени,

$$\psi(x, \quad t) = \exp\{-i\lambda_p x^p\}\varphi(t, \quad x^1, \quad ..., \quad x^{3-N}) \tag{4}$$

Наиболее общее преобразование координат и функции, сохраняющее дифференциальную структуру уравнения с частными производными второго порядка параболической нормальной формы и изменяющее его потенциал, найденное методами группового анализа, приводится в книге Л.В. Овсянникова [4, 125-128] и указанные преобразования относятся только у уравнению Шредингера и не позволяют решить поставленную задачу Коши [2]. Однако хорошо известно [4, 241], что техника группового анализа используется и при решении задачи Коши. Следуя Л.В. Овсянникову, мы доказываем лемму о преобразовании задачи Коши в задачу Коши при эквивалентном инфинитезимальном преобразовании координат и функции. Вводя дополнительные требования на матрицу перехода и преобразование координат, учитывающие начальное условие задачи, определяем группу преобразований эквивалентности уравнения Шредингера с потенциалом, содержащим линейные и квадратичные слагаемые, произвольно зависящие от времени [2]. Для случаев двух взаимодействующих квантовых осцилляторов преобразования эквивалентности найдено в явном виде. При этом волновая функция в любой момент времени выражается через волновую функцию начального состояния и решения уравнений движения для классических осцилляторов. Знание группы эквивалентности позволяет найти координаты оператора симметрии данного уравнения через известные координаты оператора эквивалентного ему уравнения. Координаты инфинитезимального оператора и решения уравнений в частных производных для ψ связаны друг с другом решениями линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами - произвольными функциями t, подлежащими определению и подчиняющимися лишь естественным граничным условиям.

Список литературы:

1. Биркгоф Л. Гидродинамика. Постановка задачи, результаты и подобие. М.:ИЛ. 1963. 184 с.

2. Гарминович Н.А. Групповой анализ и редукция уравнения Шредингера для нескольких попарно связанных осцилляторов // (Автореф. дисс.канд. физ.мат.наук. URL: https://fizmathim.com/gruppovoy-analiz-i-reduktsiya-uravneniya-shredingera-dlya-neskolkih-svyazannyh-ostsillyatorov

3. Дубровский Г.В., Денисенко А.И. Неупругие переходы при столкновении многомерных гармонических осцилляторов // Теоретическая и математическая физика. М.1986. Т.68. №2. С.255-264.

4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 399 с.

5. Шаповалов В.Н., Сухомлин Н.Б. Разделение переменных в нестационарном уравнении Шредингера // Изв. ВУЗов. Физика. 1974. №12.

УДК 378.147.227

ON THE SEPARATION OF VARIABLES IN A PARTIAL DERIVATIVE EQUATION

Natalya. A. Garminovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
krasaverenei@mail.ru
Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Abstract. The article analyzes the use of the separation of variables method for a partial differential equation with certain conditions. The possibility of an exact expression of the solution to the Cauchy problem for the Schrödinger equation in terms of solutions to classical problems for ordinary differential equations is investigated.

Keywords: partial differential equations, ordinary differential equations, Cauchy problem, separation of variables.

Статья поступила в редакцию 12.02.2024; одобрена после рецензирования 20.03.2024; принята к публикации 22.03.2024.
The article was submitted 12.02.2024; approved after reviewing 20.03.2024; accepted for publication 22.03.2024.