УДК 519.8(075.8)

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ MAPLE)

Борис Игнатьевич Смагин
доктор экономических наук, профессор
bismagin@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Симплексный метод является базовым алгоритмом, применяемым для решения задач линейного программирования, т.е. задач на отыскание экстремума линейной функции при наличии линейных ограничений. В статье указаны требования к системе ограничений при соблюдении которых применяется данный алгоритм. Рассмотрены примеры задач, имеющих конечное решение, а также не имеющие решения из-за неограниченности функции цели и пустоты области допустимых решений. Решение всех задач проиллюстрировано с использованием системы символьной математики Maple.

Ключевые слова: задача линейного программирования, симплексный метод, система Maple, оптимизация.

Задачей линейного программирования является задача на отыскание экстремума линейной функции при наличии линейных ограничений. Если задача линейного программирования имеет решение, то существует такая угловая точка области допустимых решений, в которой функция цели принимает оптимальное значение. Каждой угловой точке области допустимых решений соответствует опорный план, который определяется системой m линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,…, $\mathbf{A}_n$ (полагаем, что система ограничений, заданная в виде уравнений является линейно независимой). Так как система ограничений задачи линейного программирования содержит m уравнений и n переменных, то количество угловых точек равно числу сочетаний $C_n^m=n!/[m!(n-m)!]$. При больших m и n перебрать все угловые точки очень трудно. Поэтому необходимо иметь процедуру, позволяющую осуществлять направленный перебор угловых точек, т.е. такой перебор, при котором значение целевой функции в следующей угловой точке будет ближе к оптимальному, чем в предыдущей. Таким образом, на каждом шаге исключаются из рассмотрения те угловые точки, в которых не улучшается значение функции цели. Такой процедурой является симплексный метод, который позволяет, исходя из начального опорного плана задачи, за конечное число шагов получить оптимальный план.

Для решения задачи линейного программирования симплексным методом необходимо:

1. наличие первоначального опорного плана;

2. знание процедуры (алгоритма) перехода от одного опорного плана к другому;

3. знание условий оптимальности, позволяющих ответить на вопрос: является ли данный опорный план оптимальным или необходимо перейти к следующему опорному плану.

Для того, чтобы задача линейного программирования имела первоначальный опорный план необходимо, чтобы ее система ограничений удовлетворяла следующим условиям:

1. она должна быть записана в виде уравнений;

2.содержать единичный базис;

3.свободные члены должны быть неотрицательными ($b_i \geq 0$; $i = 1, 2,\ldots, m$).

Переход от одного опорного плана к другому осуществляется с помощью алгоритма Жордана-Гаусса.

Условия оптимальности формулируются с помощью следующей теоремы.

Теорема. (Условия оптимальности). Если задача линейного программирования решается на отыскание минимума, то план $\mathbf{X}_0$ будет оптимальным, если выполнены условия: $Z_j - C_j \leq 0$; $\forall j = 1, 2,\ldots, n$. Если хотя бы одна оценка $Z_j - C_j > 0$, то план не оптимален и его можно улучшить. Если же задача линейного программирования решается на отыскание максимума, то план $\mathbf{X}_0$ будет оптимальным, если $Z_j - C_j \geq 0$; $\forall\, j = 1, 2,\ldots, n$. Если хотя бы одна оценка $Z_j - C_j < 0$, то план не оптимален, и его можно улучшить [2].

Z_j – значение целевой функции, если в нее вместо неизвестных подставить соответствующие коэффициенты разложения вектора $\mathbf{A}_j$ по векторам базиса.

Пример 1. Решить симплексным методом задачу линейного программирования:

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_j \geq 0;\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Введя дополнительные переменные x_5 и x_6, приведем систему ограничений данной задачи к уравнениям:

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_j \geq 0;\ j =1, 2,\ldots, 6.$$

Полученная задача линейного программирования записана в каноническом виде (система ограничений задана в виде уравнений, содержит единичный базис и свободные члены неотрицательны), поэтому ее можно решать симплексным методом. Запишем систему ограничений в векторной форме:

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + x_3\mathbf{A}_3 + x_4\mathbf{A}_4 + x_5\mathbf{A}_5 + x_6\mathbf{A}_6 = \mathbf{B}$$

Напомним, что вектор $\mathbf{A}_i$ – вектор, составленный из коэффициентов системы ограничений при переменной x_i, т.е.

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ \mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{A}_5=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{A}_6=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}15\\20\\10\end{pmatrix}$$

Единичные векторы $\mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_6$, $\mathbf{A}_4$ выбираем за базис первоначального опорного плана, свободные неизвестные x_1, x_2 и x_3 приравниваем нулю. В результате получаем первоначальный опорный план $\mathbf{X}_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 10, x_5 = 15, x_6 = 20)$. Строим первую симплексную таблицу.

Таблица 1

i	Базис	С базиса	**B**	1 $\mathbf{A}_1$	2 $\mathbf{A}_2$	3 $\mathbf{A}_3$	0 $\mathbf{A}_4$	0 $\mathbf{A}_5$	0 $\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_5$	0	15	1	2	3	0	1	0
2	$\mathbf{A}_6$	0	20	2	1	5	0	0	1
3	$\mathbf{A}_4$	0	10	1	2	1	1	0	0
m+1	$Z_j - C_j$		0	–1	–2	–3	0	0	0

Величина Z_0 рассчитывается как сумма произведений элементов, стоящих в столбце «С базиса» на соответствующие элементы столбца “B”: $Z_0 = 0\cdot15+0\cdot20+0\cdot10 = 0$. Величина Z_j рассчитывается как сумма произведений элементов столбца «С базиса» на соответствующие элементы столбца «A_j»:

$$Z_1 - C_1 = 0\cdot1 + 0\cdot2 + 0\cdot1 - 1 = -1;$$

$$Z_2 - C_2 = 0\cdot2 + 0\cdot1 + 0\cdot2 - 2 = -2;$$

$$Z_3 - C_3 = 0\cdot3 + 0\cdot5 + 0\cdot1 - 3 = -3.$$

Для векторов базиса оценки $q_j = Z_j – C_j = 0$.

Данная задача решается на максимум, следовательно, оптимальный план не должен содержать отрицательных оценок q_j . Из таблицы 1 видно, что условия оптимальности не выполнены. Первоначальный план можно улучшить, включив в базис вектор, которому соответствует max $|\theta_j \cdot q_j|$ $(j \in J)$; $\theta_j = \min (x_i/a_{ij})$ для всех $a_{ij} > 0$. Поэтому:

$$\theta_1 = \min (15/1;\ 20/2;\ 10/1) = 10;\ |\ \theta_1 \cdot q_1\ | = |\ \theta_1 \cdot (Z_1 – C_1)\ | = 10;$$

$$\theta_2 = \min(15/2;\ 20/1;\ 10/2) = 5;\ |\ \theta_2 \cdot q_2\ | = |\theta_2 \cdot (Z_2 – C_2)\ | = 10;$$

$$\theta_3 = \min(15/3;\ 20/5;\ 10/1) = 4;\ |\ \theta_3 \cdot q_3\ | = |\theta_3 \cdot (Z_3 – C_3)\ | = 12,$$

$\max|\ \theta_j \cdot q_j\ | = \max (10;\ 10;\ 12) = 12$. Следовательно, разрешающим элементом будет число 5, стоящее на пересечении второй строки и столбца $\mathbf{A}_3$. Таким образом, необходимо вектор $\mathbf{A}_3$ включить в базис, а вектор $\mathbf{A}_6$ – исключить из базиса.

Составляем вторую симплексную таблицу.

Элементы разрешающей (в данном случае, второй) строки находятся в результате деления элементов второй строки предыдущей таблицы на разрешающий элемент (т.е. на 5). С помощью полученной строки произведем одно полное исключение Жордана – Гаусса, т.е. вновь полученную строку умножим на – 3 и сложим с первой строкой; умножим на – 1 и сложим с третьей строкой; умножим на 3 и сложим с (m+1) – й строкой. В результате получим таблицу 2.

Преобразования Жордана-Гаусса позволяют все элементы симплексной таблицы разбить на три класса:

1. вектор – столбцы, соответствующие базису (являются единичными векторами);

2. коэффициенты разрешающей строки новой таблицы (находятся в результате деления соответствующих коэффициентов предыдущей таблицы на разрешающий элемент);

3. все остальные элементы (вычисляются по методу прямоугольника).

Таким образом:

1. вектор – столбцы, соответствующие базису:

$$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

2. коэффициенты разрешающей строки новой таблицы:

$b_2' = 20/5 = 4$; $a_{21}' = 2/5$; $a_{22}' = 1/5$; $a_{23}' = 1$; $a_{24}' = a_{25}' = 0$; $a_{26}' = 1/5$.

3. все остальные элементы:

$b_1' = (15 \cdot 5 - 20 \cdot 3)/5 = 3$; $a_{11}' = (1 \cdot 5 - 2 \cdot 3)/5 = -1/5$; $a_{12}' = (2 \cdot 5 - 1 \cdot 3)/5 = 7/5$; $a_{16}' = (0 \cdot 5 - 1 \cdot 3)/5 = -3/5$; $b_3' = (10 \cdot 5 - 20 \cdot 1)/5 = 6$; $a_{31}' = (1 \cdot 5 - 2 \cdot 1)/5 = 3/5$; $a_{32}' = (2 \cdot 5 - 1 \cdot 1)/5 = 9/5$; $a_{36}' = (0 \cdot 5 - 1 \cdot 1)/5 = -1/5$; $Z(\mathbf{X}) = (0 \cdot 5 + 20 \cdot 3))/5 = 12$; $q_1' = (-1 \cdot 5 + 1 \cdot 3)/5 = 1/5$; $q_2' = (-2 \cdot 5 + 1 \cdot 3)/5 = -7/5$; $q_6' = (0 \cdot 5 + 1 \cdot 3)/5 = 3/5$.

Таблица 2

i	Базис	C базиса	**B**	1 $\mathbf{A}_1$	2 $\mathbf{A}_2$	3 $\mathbf{A}_3$	0 $\mathbf{A}_4$	0 $\mathbf{A}_5$	0 $\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_5$	0	3	–1/5	7/5	0	0	1	–3/5
2	$\mathbf{A}_3$	3	4	2/5	1/5	1	0	0	1/5
3	$\mathbf{A}_4$	0	6	3/5	9/5	0	1	0	–1/5
m+1	$Z_j - C_j$		12	1/5	–7/5	0	0	0	3/5

В таблице 2 получен второй опорный план $\mathbf{X}_1 = (x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 4; x_4 = 6; x_5 = 3; x_6 = 0)$, которому соответствует значение функции цели $Z(\mathbf{X}_1) = 12$. Полученный план не является оптимальным, так как $q_2 = Z_2 - C_2 = -7/5 < 0$. Следовательно, вектор $\mathbf{A}_2$ необходимо включить в базис.

$$\theta_2 = \min \left\{ \frac{3}{7/5}; \frac{4}{1/5}; \frac{6}{9/5} \right\} = 15/7.$$

Число 7/5, стоящее на пересечении первой строки и столбца $\mathbf{A}_2$ будет разрешающим элементом. Из базиса исключается вектор $\mathbf{A}_5$. Вновь используя преобразования Жордана-Гаусса, переходим к третьей симплексной таблице (таблице 3).

Таблица 3

i	Базис	C базиса	**B**	1 **A_1**	2 **A_2**	3 **A_3**	0 **A_4**	0 **A_5**	0 **A_6**
1	**A_2**	2	15/7	–1/7	1	0	0	5/7	–3/7
2	**A_3**	3	25/7	3/7	0	1	0	–1/7	2/7
3	**A_4**	0	15/7	6/7	0	0	1	–9/7	4/7
m+1	$Z_j – C_j$		15	0	0	0	0	1	0

Так как в (m + 1) – й строке таблицы 3 все оценки неотрицательны, то план $\mathbf{X}_2 = (x_1 = 0;\ x_2 = 15/7;\ x_3 = 25/7;\ x_4 = 15/7)$ – оптимальный и ему соответствует максимальное значение функции цели $Z(\mathbf{X}_2) = 15$. На основании оценок (m + 1) – й строки можно заключить, что оптимальный план для данной задачи не является единственным, так как нулевые оценки соответствуют векторам $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_6$ не входящим в базис.

Решим теперь данную задачу, используя систему Maple [1]:

```
> with(simplex) :
> maximize(x1 + 2·x2 + 3·x3, {x1 + 2·x2 + 3·x3 ≤ 15, 2·x1 + x2 + 5
     ·x3 ≤ 20, x1 + 2·x2 + x3 + x4 = 10, x1 + 2·x2 + 3·x3 − z = 0},
     NONNEGATIVE);
```

$$\left\{x1 = \frac{5}{2},\ x2 = \frac{5}{2},\ x3 = \frac{5}{2},\ x4 = 0,\ z = 15\right\}$$

Тем самым получено решение, полностью совпадающее с оптимальным планом в вышеприведенной таблице.

Задача линейного программирования может не иметь решения в двух случаях: а) область допустимых решений пуста; б) функция цели не ограничена. Симплексным методом можно обнаружить только второй случай.

Пример 2. Решить симплексным методом задачу линейного программирования:

$$Z = x_1 – 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$– x_1 – x_2 – 2x_3 \le 5$$

$$2x_1 – 3x_2 + x_3 \le 3$$

$$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5$$

$$x_j \ge 0;\ j = 1, 2, 3.$$

Сведя с помощью дополнительных переменных x_4, x_5 и x_6 систему ограничений к уравнениям, получим задачу линейного программирования:

$$Z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min$$

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = 3$$

$$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_6 = 5$$

$$x_j \ge 0;\ j = 1, 2,\ldots, 6.$$

Полученная задача линейного программирования удовлетворяет всем условиям, позволяющим применить для ее решения алгоритм симплексного метода. Построим симплексную таблицу:

Таблица 4

i	Базис	C базиса	**B**	1 $\mathbf{A}_1$	–3 $\mathbf{A}_2$	2 $\mathbf{A}_3$	0 $\mathbf{A}_4$	0 $\mathbf{A}_5$	0 $\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_4$	0	5	–1	–1	–2	1	0	0
2	$\mathbf{A}_5$	0	3	2	–3	1	0	1	0
3	$\mathbf{A}_6$	0	5	2	–5	6	0	0	1
m+1	$Z_j - C_j$		0	–1	3	–2	0	0	0

Данная задача решается на минимум, следовательно, оптимальный план не должен содержать положительных оценок. Из таблицы 4 видно, что условия оптимальности не выполнены ($q_2 = Z_2 - C_2 > 0$). Это означает, что вектор $\mathbf{A}_2$ следует ввести в базис. Все коэффициенты разложения вектора $\mathbf{A}_2$ по векторам базиса отрицательные, т.е. невозможно выбрать разрешающий элемент. Поэтому данная задача линейного программирования не имеет решения из-за неограниченности функции цели.

При решении задачи линейного программирования в системе Maple, вводя условие NONNEGATIVE (неотрицательность), мы должны быть уверены, что кроме переменных x_j все другие параметры, входящие в систему ограничений также должны быть неотрицательны. Тем самым, здесь не следует определять значение целевой функции z (которая может принимать отрицательные значения), т.е. не требуется вводить ограничение $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - z = 0$.

> $with(simplex)$:

> $minimize(x1 - 3 \cdot x2 + 2 \cdot x3, \{-x1 - x2 - 2 \cdot x3 \leq 5, 2 \cdot x1 - 3 \cdot x2 + x3 \leq 3, 2 \cdot x1 - 5 \cdot x2 + 6 \cdot x3 \leq 5\}, NONNEGATIVE);$

Как видим, система Maple не выдает решение, свидетельствуя о том, что функция цели не ограничена, т.е. «убегает» в – ∞.

Список литературы:

1. Гилев В.Г. Современные пакеты прикладных программ. Основы работы в Maple / Пермь: ПГНИУ. 2022. 95 с.

2. Смагин Б.И. Экономико-математические методы: учебник для академического бакалавриата // 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Юрайт. 2017. 272с.

UDC 519.8(075.8)

SIMPLEX METHOD FOR SOLVING A LINEAR PROGRAMMING PROBLEM (USING THE MAPLE SYSTEM)

Boris I. Smagin
doctor of economics, professor
bismagin@mail.ru
Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Abstract. The simplex method is a basic algorithm used to solve linear programming problems, i.e. problems for finding the extremum of a linear function in the presence of linear constraints. The article specifies the requirements for the system of restrictions under which this algorithm is applied. Examples of problems with a finite solution are considered, as well as those that have no solution due to the limitlessness of the goal function and the emptiness of the domain of acceptable solutions. The solution of all problems is illustrated using the Maple symbolic mathematics system.

Keywords: linear programming problem, simplex method, Maple system, optimization.

Статья поступила в редакцию 10.05.2023; одобрена после рецензирования 15.06.2022; принята к публикации 30.06.2023.

The article was submitted 10.05.2023; approved after reviewing 15.06.2022; accepted for publication 30.06.2023.