УДК 535

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИИ И ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛЯ ФРЕНЕЛЯ

Борис Игнатьевич Смагин
доктор экономических наук, профессор
bismagin@mail.ru
Борис Иванович Липатов
старший преподаватель
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. В статье рассмотрена математическая модель оптической дифракции, физической основой которой стал принцип Гюйгенса – Френеля. В построенной модели присутствуют интегралы Френеля, которые могут быть представлены степенными рядами, параметрические уравнения которых описываются спиралью Корню, проиллюстрированные с помощью кода на языке Python.

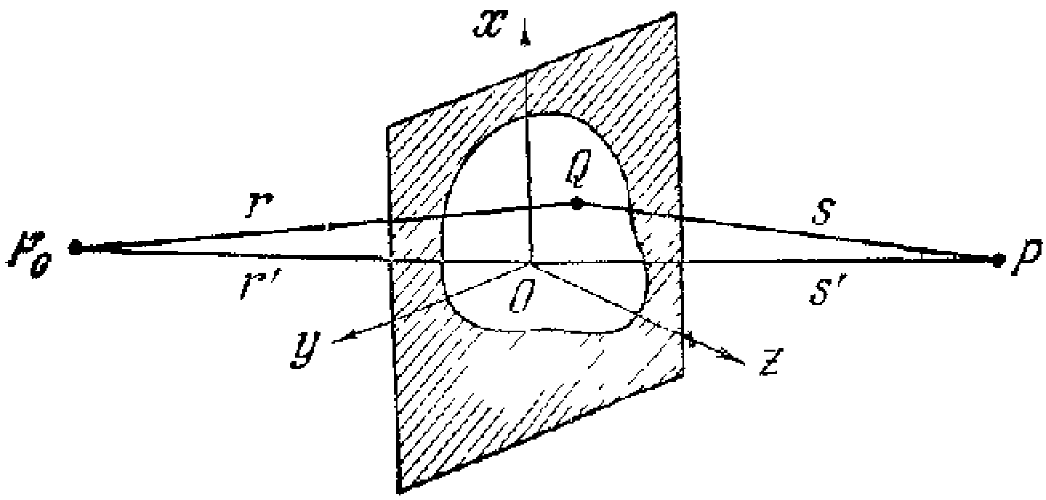
Ключевые слова. дифракция света, интеграл Френеля, метод комплексных амплитуд, алгоритмический язык Python.

Значительная часть оптических приборов основана на таком фундаментальном явлении, как явлении дифракции, и потому в данной статье, следуя [2], будут рассмотрены некоторые аспекты этого многогранного явления.

Физической основой для рассмотрения явления дифракции стал принцип Гюйгенса – Френеля (следует также отметить, что для математического описания этого явления много сделал немецкий ученый Кирхгоф, и потому упомянутый выше принцип иногда называют принципом Гюйгенса – Френеля – Кирхгофа.

Качественно этот принцип заключается в следующем. При дифракции на препятствии и на отверстии (отверстиях) происходит взаимодействие световой волны с материальным объектом, и он становится источником вторичных волн, которые, взаимодействуя (интерферируя), дают некоторое распределение освещенности (интенсивности), т.е. определенную картину светлых и темных пятен, полос, колец и т.д., и именно получение количественного описания этой интенсивности (освещённости) является целью теории дифракции.

Поскольку в оптических приборах чаще реализуется процесс дифракции на отверстиях, в дальнейшем будет рассматриваться именно он.



Пусть в точке P_0 помещен некоторый точечный источник света, который падает на лист непрозрачного материала M, в котором имеется отверстие A. считаем, что и лист M, и отверстие A – плоские. Тогда согласно принципу Гюйгенса – Френеля граница области A будет источником вторичных световых волн, взаимодействие которых и будет определять распределение интенсивности света.

Поставим задачу – определить интенсивность I(P) в точке P. Так как в физике часто используется метод комплексных амплитуд, то

$$U(P)=B(C+iS), \qquad (1)$$

где B, C, S определяют векторы электрического поля $\vec{E}$ и магнитного поля $\vec{H}$ световой волны. Здесь

$$B=-A\frac{i}{\lambda}\cdot\cos\delta\cdot\frac{\exp\left[ik(r'+s')\right]}{r's'} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} C=\iint\limits_A \cos\left\{kf(\xi,\eta)\right\}d\xi d\eta \\ S=\iint\limits_A \sin\left\{kf(\xi,\eta)\right\}d\xi d\eta \end{cases} \qquad (3)$$

(здесь k = 2π/λ – волновое число, λ – длина волны света из источника P0, A – амплитуда сферической волны, а δ – угол между отрезком $\frac{A}{r}e^{ikr}bP_0$ P_0P и нормалью к экрану).

Отметим также, что $I(P)=\left|U(P)\right|^2$ и потому

$$I(P)=B^2\left(C^2+S^2\right) \qquad (4)$$

Разлагая f (ξ, η) в ряд и отбрасывая слагаемые с ξ и η в 3-й и более высоких степенях, приведем интегралы (3) к виду

$$\begin{cases} C=\iint\limits_A \cos\left\{\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}\right)\left(\xi^2\cos^2\delta+\eta^2\right)\right\}d\xi d\eta \\ S=\iint\limits_A \sin\left\{\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}\right)\left(\xi^2\cos^2\delta+\eta^2\right)\right\}d\xi d\eta \end{cases} \qquad (5)$$

Вводя для удобства новые переменные интегрирования u и v, определяемые соотношениями

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{\lambda}\left(\dfrac{1}{r'}+\dfrac{1}{s'}\right)\cdot\xi^2\cos^2\delta=\dfrac{\pi}{2}u^2 \\ \dfrac{\pi}{\lambda}\left(\dfrac{1}{r'}+\dfrac{1}{s'}\right)\cdot\eta^2=\dfrac{\pi}{2}v^2 \end{cases}$$

получим, что

$$d\xi d\eta=\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{du\cdot dv}{\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}\right)\cdot\cos\delta},\ a$$

$$\begin{cases} C=b\iint\limits_{A'}\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}\left(u^2+v^2\right)\right\}dudv \\ S=b\iint\limits_{A'}\sin\left\{\dfrac{\pi}{2}\left(u^2+v^2\right)\right\}dudv \end{cases},$$

где $b=\dfrac{\lambda}{2\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}\right)\cdot\cos\delta}$.

Если A' – прямоугольник со сторонами, параллельными осям u и v, то интегралы (5) можно упростить, используя тождества

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2}\left(u^2+v^2\right)\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)$$

$$\sin\left\{\frac{\pi}{2}\left(u^2+v^2\right)\right\}=\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right),$$

что приводит к интегралам

$$E(u)=\int_0^u\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau,\ L(u)=\int_0^u\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau. \qquad (6)$$

Полученные интегралы Френеля широко используются в оптике и кроме вышеприведенной записи могут определяться следующими формулами:

$$S(z)=\int_0^z\sin\left(\frac{t^2}{2\pi}\right)dt,\ C(z)=\int_0^z\cos\left(\frac{t^2}{2\pi}\right)dt.$$

Довольно часто интегралы Френеля определяются как

$$S(x)=\int_0^x \sin\left(t^2\right)dt,\ \ C(x)=\int_0^x \cos\left(t^2\right)dt$$

Параметрический график *S*(*x*) и *C*(*x*) даёт кривую на плоскости, называемую спиралью Корню или клотоидой. Это кривая, являющаяся параметрическим графиком *S*(*t*) от *C*(*t*). Спираль Корню была придумана Мари Альфредом Корню для облегчения расчёта дифракции в прикладных задачах. Так как

$$C'\left(t^2\right)+S'\left(t^2\right)=\sin^2\left(t^2\right)+\cos^2\left(t^2\right)=1,$$

то в такой параметризации касательный вектор имеет единичную длину, так что *t* является длиной кривой, измеряемой от точки (0,0). Следовательно, обе ветви спирали имеют бесконечную длину. Кривизна этой кривой в любой точке пропорциональна длине дуги, заключённой между этой точкой и началом координат.

Интегралы Френеля могут быть представлены степенными рядами, сходящимися при всех *x*:

$$S(x)=\int_0^x \sin\left(t^2\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^{11}}{1320}-\ldots,$$

$$C(x)=\int_0^x \cos\left(t^2\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}=x-\frac{x^5}{10}+\frac{x^9}{216}-\ldots,$$

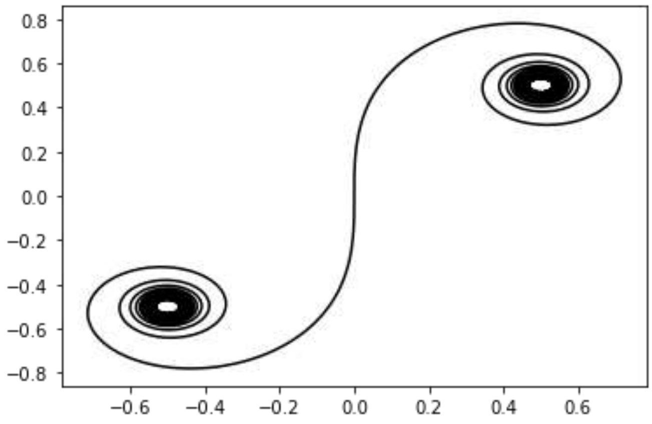
Некоторые авторы используют в качестве аргумента тригонометрических подынтегральных функций $\frac{\pi}{2}t^2$. Таким образом определенные интегралы Френеля получаются из определённых выше интегралов заменой переменной $t\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot t$ и умножением интегралов на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Таким образом, мы приходим к интегралам вида (6).

При использовании алгоритмического языка Python оба интеграла возвращаются в кортеже для действительного или комплексного аргумента z метода fresnel(z) из модуля scipy.special. Связанная с ними функция fresnel_zeros(nt) возвращает nt первых комплексных нулей интегралов S(z) и C(z) [1,3].

Кривая, описываемая параметрическими уравнениями (x,y) = (S(t), C(t)), называется клотоидой (или спиралью Эйлера (часто ее также называют спиралью Корню)) и обладает тем свойством, что ее кривизна пропорциональна расстоянию, отмеряемому вдоль ее траектории.

Приведем код, создающий графическое изображение спирали Эйлера при $-10 \le t \le 10$.

```
import numpy as np
from scipy.special import fresnel
import matplotlib.pyplot as plt
t=np.linspace(-10,10,1000)
plt.plot(*fresnel(t),c='k')
plt.show()
```



Список литературы:

1. Бизли Д. Python: Исчерпывающее руководство. СПб.: Питер, 2023. 368с.

1. Борн, М. Основы оптики /М. Борн, Э. Вольф. М.: Наука, 1973. 720с.

3. Хилл К. Научное программирование на Python. М.: ДМК Пресс, 2021. 647с.

UDC 535

MATHEMATICAL MODEL OF OPTICAL DIFFRACTION AND ESTIMATION OF FRESNEL INTEGRALS

Boris I. Smagin
Doctor of Economics, Professor
bismagin@mail.ru
Boris I. Lipatov
Senior lecturer
Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Annotation. The article considers a mathematical model of optical diffraction, the physical basis of which was the Huygens –Fresnel principle. The constructed model contains Fresnel integrals, which can be represented by power series, the parametric equations of which are described by a spiral to the Root, illustrated using Python code.

Keywords: light diffraction, Fresnel integral, complex amplitude method, Python algorithmic language.

Статья поступила в редакцию 12.11.2022; одобрена после рецензирования 02.12.2022; принята к публикации 20.12.2022.

The article was submitted 05.11.2022; approved after reviewing 02.12.2022; accepted for publication 20.12.2022.