УДК 514

6-Е ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

Стариков В.Н.
старший преподаватель,

ФГБОУ ВО Мичуринский ГАУ,

г. Мичуринск, Россия.

E-mail: vnst@mail.ru

Аннотация. Сообщаются некоторые новые теоремы для треугольника. Например, обобщенная лемма Архимеда, обобщенная теорема Брахмагупты и др.

Ключевые слова: геометрия, треугольник.

Введение. В настоящей работе введено сокращение слова: треугольник=**3-к,** четырехугольник=**4-к**. Также целесообразно вместо длинного слова «окружность» использовать его краткие эквиваленты: 1) «о-сть» («ость»), «округа» или «округ» (в зависимости от контекста); 2) «обруч» вместо «описанная окружность» (обруч бочки снаружи обжимает многоугольник, образованный досками); 3) «обод» вместо «описанная окружность» (обод колеса изнутри обжимает многоугольник или окружность, образованные покрышкой), 3) «бур» вместо «окружность, пересекающая многоугольник».

Результаты исследований.

Теорема о бабочке, полувписанной в окружность. 4-к *ABED* на рис. 1 – равнобокая трапеция ($AD \parallel BE$, $AB=ED$). Диагонали *AE* и *BD* трапеции разрезают ее на 2 равных 3-ка *ACB* и *ECD*, имеющих общую биссектрису *KU* (или *KL*) двух равных (вертикальных) углов соответственно *ACB* и *ECD*. В упомянутых 2 равных 3-ках также равны стороны: $AC=CD$ и $CB=EC$. Равны также противолежащие им углы. 3-к *ACB*, вписанный в окружность (*A,C,B,G,L,M*), вместе с 3-ком *ECD* образует невыпуклый 4-к *ABDE*, который мы назовем «*бабочкой, полувписанной в окружность»* (*A,C,B,G,L,M*). Именно о нем пойдет речь в ***теореме о бабочке, полувписанной в окружность.*** Проведем два отрезка прямых *FG* и *NM* так, что по сути отложим относительно биссектрисы *KL* два равных вертикальных угла соответственно *ACB* и *ECD* еще две пары произвольных равных вертикальных углов: $\angle FCK=\angle LCG$, $\angle NCK=\angle LCM$, причем все 4 угла равны между собой: $\angle FCK=\angle LCG=\angle NCK=\angle LCM$. При этом 2 верхних угла опираются концами на сторону *ED* 3-ка *ECD*, а 2 нижних угла опираются концами на окружность (*A,C,B,G,L,M*). Тогда *теорема о бабочке, полувписанной в окружность*, утверждает: $AC{\cdot}CE=BC{\cdot}CD=MC{\cdot}CN=GC{\cdot}CF=LC{\cdot}CK=const$. Последнюю формулу мы назовем *правилом ложных се-*

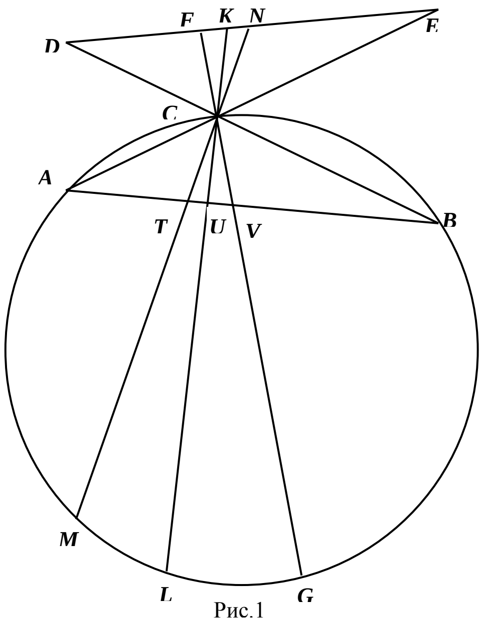

Рис.1

кущих (псевдосекущих) окружности (A,C,B,G,L,M). Т.к. по построению $FC=CT$, $KC=CU$, $NC=CV$, то написанное выше *правило ложных секущих* может быть сформулировано исключительно на языке элементов одного 3-ка, вписанного в окружность, а именно: $AC{\cdot}BC={\cdot}\ MC{\cdot}CV=\ GC{\cdot}CT=\ LC{\cdot}CU=const$. Т.к. на рис. 1 CU (или CL) - биссектриса 3-ка ACB, CT – *чевиана*, а CV – соответствующая ей *изочевиана* (*чевиана* и *изочевиана* образуют равные углы относительно биссектрисы CU: $\angle TCU=\angle UCV$), тогда последняя формула может быть сформулирована словами так: *произведение чевианы и ее изочевианы, продолженной до ее пересечения с описанной окружностью 3-ка, которые выходят из одной вершины 3-ка, постоянно и не зависит от типа чевианы и ее изочевианы.* Это произведение всегда равно произведению сторон 3-ка, которые сходятся в упомянутой выше вершине, а также равно произведению биссектрисы (проведенной из той же вершины 3-ка, что и чевиана и ее изочевиана) на биссектрису, продолженную до ее пересечения с описанной окружностью 3-ка. Примерами чевианы и ее изочевианы могут служить: *медиана* и ее *симедиана*, *высота* и ее *сивысота* (совпадающая с частью диаметра описанной окружности 3-ка, проведенного из той же вершины 3-ка, что и высота). Доказательство теоремы просто, но здесь для него нет места. Заметим, что *чевиана* и ее *изочевиана* (возможно также название *сичевиана*) вместе с биссектрисой 3-ка, проведенные из одной вершины, отсекают от данного 3-ка два 3-ка, которые мы назовем *псевдоподобными*. Например, на рис. 1 два 3-ка TCU и UCV *псевдоподобные*, ибо $\angle TCU=\angle UCV$, $CT/TU=CV/VU$.

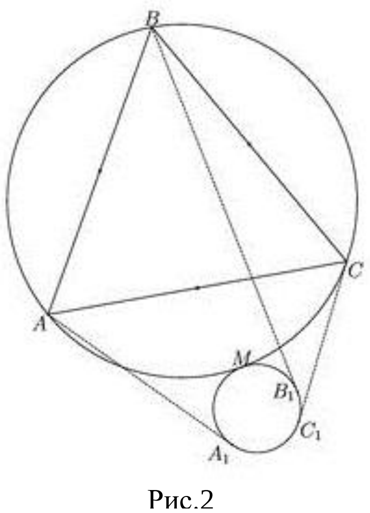

Рис.2

Обобщённая теорема Помпею (см. рис. 2) утверждает: Пусть окружность касается описанной окружности равностороннего треугольника ABC в произвольной точке M. Проведём "касательные" AA_1, BB_1, CC_1 к этой окружности из вершин треугольника. Тогда $AA_1+CC_1=BB_1$ (рис.2). Используя это, теорему Кейси и некоторые соображения можно доказать следующее:

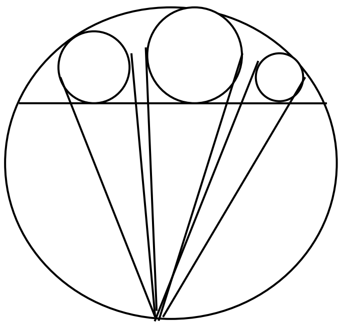

Рис.3

Если внутри произвольной большой окружности (рис. 3) хордой отсечь круговой сегмент меньше половины этой окружности и в полученный сегмент вписать произвольные малые окружности любого диаметра так, чтобы они касались в одной точке хорды, а в другой точке касались внутренним образом этой большой окружности, а из точки *A*, лежащей на диаметре большой окружности, перпендикулярном выше упомянутой хорде, провести пары касательных к указанным выше малым окружностям, то длины этих касательных будут равны, т. е. вторые концы этих касательных будут лежать в одной точке *A*, расположенной на большой окружности (рис. 3). То есть на рис 3 все 6 касательных к окружностям, проведенные из точки *A*, лежат на одной окружности с центром в точке *A*, а сами касательные являются радиусами этой окружности. Рис. 3 служит иллюстрацией к одному из частных случаев нашего параграфа «*Общий радикальный центр семейств окружностей»* (см. в предыдущем выпуске нашу статью «5-е исследование по геометрии»). Возникает вопрос: на какой кривой лежат центры семейства окружностей, вписанных на рис. 3 в круговой сегмент? В общем случае, если нижняя ограничивающая линия - не прямая, а окружность, видимо, это семейство центров лежит на кривой 2-го порядка. В данном случае это, скорее всего, - тоже окружность.

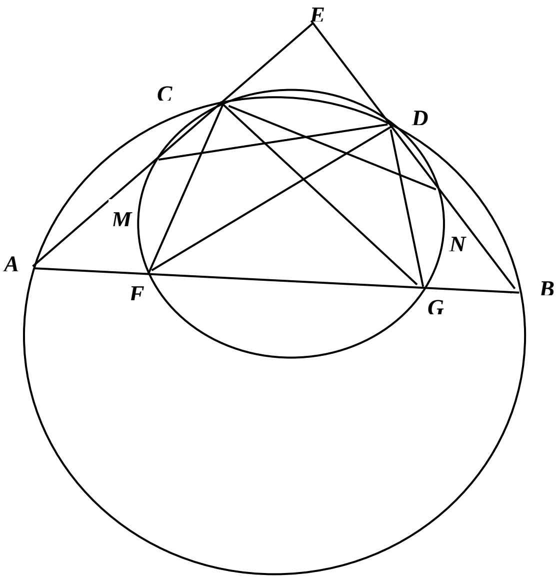

Рис.4.

Обобщенная лемма Архимеда. На рис 4 даны две пересекающиеся окружности (*A,B,D,C*) и (*M,F,G,N,D,C*), которые пересекает 3-к *ABE*. Через точки *D* и *C* пересечения 2 окружностей проведены также хорды *DM, DF, CN, CG* внутри малой окружности через точки ее пересечения со сторонами 3-ка *ABE*. Легко доказать, что при этом *MN*||*AB*. Следовательно, *MNGF* – равнобокая трапеция, вписанная в малую окружность. Поэтому равны вписанные в малую окружность углы, опирающиеся на равные дуги, т. е. равны углы: $\angle MDF=\angle MCF=\angle GCN=\angle GDN$. Это и есть **обобщенная лемма Архимеда.** Из нее следуют два частных случая **обобщения леммы Архимеда**: когда совпадают 3 точки *C,E* и *D* в виде одной точки или когда совпадают 2 точки *F* и *G* в виде другой точки. Если же одновременно совпадают 3 точки *C,E* и *D* и 2 точки *F* и *G* в виде двух разных точек, то мы имеем обычную *лемму Архимеда*. **Доказательство обобщенной леммы Архимеда**. На рис.4 в 3-ке *ABE* отрезки *DC* и *MN* антипараллельны, как хорды окружности (*M,F,G,N,D,C*), а отрезки *DC* и *AB* антипараллельны, как хорды окружности (*A,B,D,C*). Обозначив антипараллельно знаком «↑↓», имеем *DC* ↑↓ *MN* и *DC* ↑↓ *AB* или цепочкой *MN*↑↓ *DC* ↑↓ *AB*. Т.е. отрезок *MN* дважды антипараллелен отрезку *AB* через отрезок *DC*, следовательно, отрезки *MN* и *AB* параллельны (к такому же выводу можно прийти, рассматривая подобия 3-ков). Следовательно, отрезки *MN* и *FG* параллельны. Следовательно, *FGNM* - равнобокая трапеция, вписанная окружность (*M,F,G,N,D,C*). Следовательно, равны отрезки *MF* и *NG*. Следовательно, равны дуги $\smile MF$ и $\smile NG$, опирающиеся на равные отрезки *MF* и *NG*. Следовательно, равны углы: $\angle MDF=\angle MCF=\angle GCN=\angle GDN$, вписанные в окружность (*M,F,G,N,D,C*), опирающиеся на равные дуги $\smile MF$ и $\smile NG$.

Обобщенная теорема Брахмагупты. Понятие пары изочевиан 3-ка введены выше. С их помощью теорема Брахмагупты обобщается в виде (рис. 5). Если в 4-ке *ABCD,* вписанном в окружность, диагонали *AC* и *BD* (персекающиеся в точке *M*) разбивают его на 2 пары подобных 3-ков *ADM* и *BCM, ABM* и *DCM,* образующих два 4-ка – «бабочки», тогда любые две пары изочевиан любой пары из этих подобных 3-ков, проведенные из вершины *M*, образуют друг с другом две пары отрезков прямых, пересекающихся в точке *M.* В этом и суть **обобщенной теоремы Брахмагупты.** Например, на рис. 5 в паре подобных 3-ков *ADM* и *BCM* из вершины *M* проведены две пары *изочевиан MF* и *MG, ME* и *MK* (синего цвета). Теорема утверждает, что в этом случае эти пары изочевиан образуют два сплошных отрезка прямых: *FE* и *GK*, пересекающихся в точке *M.* **Доказательство**. Т.к. пары изочевиан 3-ка образуют рав-

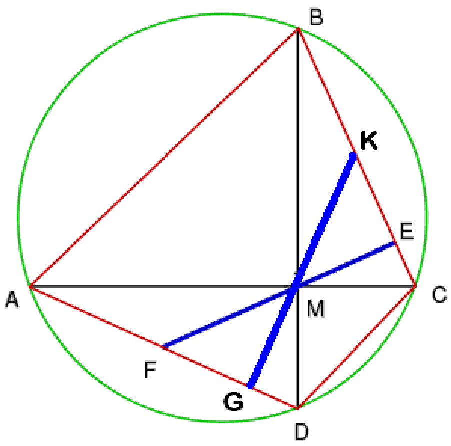

Рис. 5

ные углы с его сторонами, то равны 4 угла; $\angle AMF=\angle DMG=\angle BMK=\angle CME$. Но тогда FE и GK образуют два сплошных отрезка прямых, пересекающихся в точке M, ибо пары углов: $\angle AMF=\angle CME$, $\angle DMG= \angle BMK$, - равны, как вертикальные углы этих двух сплошных отрезков прямых FE и GK. Сама **теорема Брахмагупты** следует отсюда, как частный случай, когда парами изочевиан 3-ка являются медиана и симедиана, поскольку при дополнительном требовании теоремы о перпендикулярности диагоналей ($AC\perp BD$) в любой паре рассмотренных выше прямоугольных подобных 3-ков (ADM и BCM, ABM и DCM) *симедианой*, проведенной из вершины M прямого угла, служит *высота*, проведенная из вершины M этого прямого угла (легко доказывается этот факт).

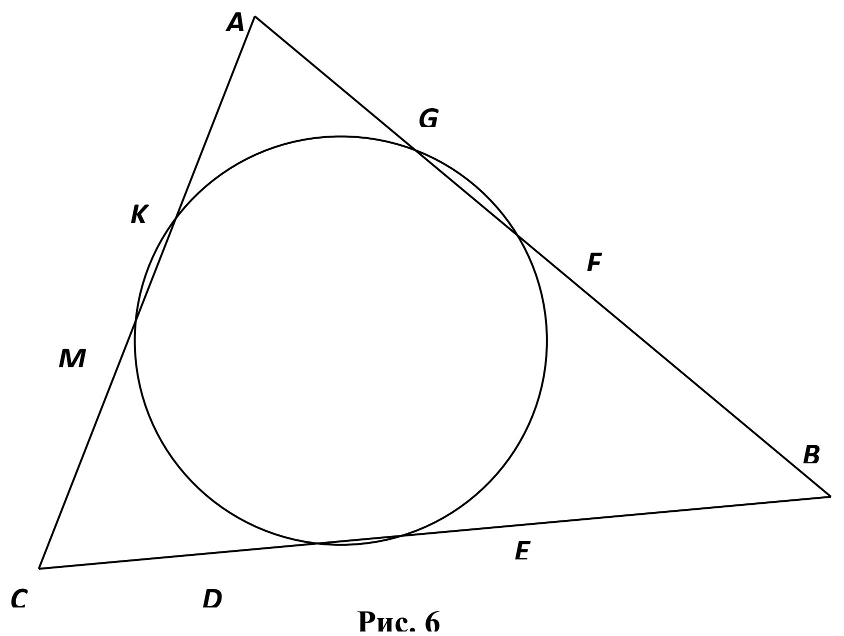

Рис. 6

Уточнение теоремы Мавло. Для 3-ка ABC и его окружности Эйлера (D,E,F,G,K,M) на рис. 6 *теорема Мавло* утверждает, что одна из трех дуг окружности (в нашем случае это - дуга $\cup GF$), отсекаемая одной стороной 3-ка, равна сумме двух других дуг той же окружности, отсекаемых двумя другими сторонами 3-ка (в нашем случае это - сумма дуг $\cup KM$ и $\cup DE$). **Уточнение теоремы Мавло** состоит в том, что можно точно указать радианные меры этих дуг, а именно: $\cup GF=2|\angle A-\angle B|$, $\cup KM=$
$=2|\angle A-\angle C|$, $\cup DE=2|\angle C-\angle B|$. Откуда легко убеждаемся в справедливости теоремы Мавло.

Выводы. По-нашему мнению, рассмотренные вопросы будут полезны геометрам.

Список литературы:

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть 1: Планиметрия. Изд. 4-е, М.: Учпедгиз, 1957. 608 с.

2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., исправл. М.: Наука. 1986. 544 с.

3. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 1978. Переиздание: М.: АСТ, 2006. 509 с.

4. Ефремов Д.. Новая геометрия треугольника. М.: Издательство: Типография бланкоиздательства Шпенцера, Одесса, 1902. 351 с.

5. Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканави М. И. Элементарная математика. Повторительный курс. Издание третье, стереотипное. М.: Наука, 1976. 591 с.

6. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. М.:.: Наука, 1978. 224 с.

7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 720 с.

8. Мякишев А. Г. Элементы геометрии треугольника. М.: МЦНМО, 2002. 32 с.

9. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Том 1. Планиметрия, преобразования плоскости. М.: МЦНМО, 2004. 312 с.

UDC 514

6-RD RESEARCH ON GEOMETRY

Starikov V. N.,
major teacher.
Michurinsk State Agrarian University,
Michurinsk, Russia.

Abstract. It is described a new theorems of the triangle and others formulae of the triangle. For example, generalized Archimed’s lemma, generalized Brahmagupta’s theorem etc.

Keywords (Docuterm): geometry, triangle.