УДК 510:514

ФРАКТАЛЫ В МАТЕМАТИКЕ

Наталия Владимировна Пчелинцева[1]
старший преподаватель
natas79@mail.ru
Екатерина Сергеевна Репина[1]
студент
ekaterina_repina2003@mail.ru
Татьяна Константиновна Яшина[2]
студент
yashtan@mail.ru
[1]Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия
[2] НИТУ «МИСиС»
г. Москва, Россия

Аннотация. В статье приведена общепринятая классификация фрактальных структур. Рассмотрены геометрические, алгебраические и стохастические фракталы, а также основные свойства фрактальных множеств.

Ключевые слова: самоподобие, фракталы, классификация фракталов, бифуркация.

Термин «фрактал» был введен французским и американским математиком Бенуа Мандельбротом в 1975 году и приобрел значительную известность после публикации его книги "Фрактальная геометрия природы" в 1977 году. С развитием компьютерных технологий, которые позволяют нам детально изучать эти структуры, они стали особенно популярными [1].

В математике фракталы понимаются как геометрические фигуры, в которых один и тот же узор повторяется в постоянно уменьшающейся композиции.

Если сравнить множество фигур, то можно найти в них много различий, потому что все они разные. Эти различия обнаруживаются не только в форме фигуры, но и в самой форме представления этих множеств. Вот почему существует несколько типов: геометрические, алгебраические и стохастические фигуры. Давайте подробнее рассмотрим каждый тип.

Геометрические фигуры. Это одна из самых больших групп фигур. Они самые примитивные для человеческого глаза. Они строятся по принципу исходной формы (линия, многоугольник или многогранник), делят ее и выполняют различные преобразования полученных кусочков. Более популярные представители данной группы.

Снежинка Коха – один из первых фракталов, изученных учеными. Он получен из 3-х схожих кривых Коха. Впервые о нем заговорили после появления в статье шведского математика Хельге фон Коха в 1904 году. Кривые были изобретены как пример непрерывной линии, которая не могла провести касательную ни в одной точке. Фрактал построен по равностороннему треугольнику.

Треугольник Серпинского - представляет из себя фрактал, первый из двумерных аналогов множества Кантора, математическое описание которого было опубликовано математиком Вацлавом Чирпинским в 1915 году. Он также известен, как «салфетка» Серпинского. Чтобы его сделать, нужно взять равносторонний треугольник с внутренностью, провести на нем центральную линию и поместить в центр образовавшихся четырех маленьких треугольников.

После этой операции вам нужно повторить с каждым из оставшихся треугольников тоже самое.

Видными представителями этой группы также являются: Кривая Пеано, пыль Кантора и «дракон» Хартера-Хейтуэя.

Алгебраические фракталы.

Другая большая группа фигур. Эти фракталы созданы на основании алгебраических формул, часто незамысловатых. Эти фракталы возникают при изучении нелинейных динамических систем. Поведение такой системы может быть описано сложными нелинейными функциями. Давайте возьмем начальной точку в комплексной плоскости. Теперь рассмотрим бесконечную последовательность чисел в комплексной плоскости. Это число получено из предыдущей плоскости. В зависимости от начальной точки эти последовательности могут вести себя по-разному [2].

В результате каждая точка имеет свое собственное поведение при повторении сложных плоских функций. В то же время точки, расположенные на границах этой части, обладают следующими свойствами: при сколь угодно малом смещении характер их действий резко меняется (такие точки называются бифуркациями). В результате многие точки и многочисленные бифуркации с определенными типами поведения часто обладают фрактальными свойствами.

Множества Мендельброта строится немного по-другому. Разберем функцию $f_c(z)=z^2+c$, где c — комплексное число. Построим последовательность этой функции с $z_0 = 0$, в зависимости от параметра c она может расходиться к бесконечности или оставаться ограниченной. При этом все значения c, при которых эта последовательность ограничена, как раз и образуют множество Мандельброта. Оно было детально изучено самим Мандельбротом и другими математиками, которые открыли немало интересных свойств этого множества.

Видно, что определения множеств Жюлиа и Мандельброта схожи. Несомненно, эти два множества тесно связаны. А именно, множество Мандельброта — это все значения комплексного параметра c, при которых множество Жюлиа $f_c(z)$ связно (множество называется связным, если его нельзя разбить на две непересекающиеся части, с некоторыми дополнительными условиями) [3, 4].

Стохастические фракталы.

Стохастические фракталы – получаются, если в итерационном процессе случайным образом изменять какие-либо параметры. При этом можно получить объекты, очень похожие на природные, которые демонстрируют несимметричные деревья, изрезанность береговых линий, модели рельефов местности и поверхности морей.

Фракталы помогают выйти на новый уровень познания существа мира и выполнять более сложные исследования. Фракталы дают нам возможность описывать сложные процессы: социальные, экономические, политические. Так же они используются для моделирования компьютерных изображений и сжатия информации.

Список литературы:

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
2. Гущина А.А., Пчелинцева Н.В. Устройства и технологии виртуальной реальности в нашей жизни // Наука и Образование. 2020. Т. 3. № 4. С. 85
3. Заболотникова М.А., Картечина О.С., Пчелинцева Н.В. Сравнительный анализ хэш-функций // Наука и Образование. 2020. Т. 3. № 2. С. 48.
4. Функции автоматизированной системы управления технологическими процессами / А.А. Мжачих, А.С. Кривошеин, Н.В. Картечина, Н.В. Пчелинцева // Наука и Образование. 2020. Т. 3. № 2. С. 28.

UDC 510:514

FRACTALS IN MATHEMATICS

Natalia V. Pchelintseva[1]
Senior lecturer
natas79@mail.ru
Ekaterina S. Repina[1]
student
ekaterina_repina2003@mail.ru
Tatiana K. Yashina[2]
student
yashtan@mail.ru
[1]Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia
[2]NUST MISIS
Moscow, Russia

Annotation. The article presents the generally accepted classification of fractal structures. Geometric, algebraic and stochastic fractals are considered, as well as the basic properties of fractal sets.

Key words: self-similarity, fractals, fractal classification, bifurcation.

Статья поступила в редакцию 29.03.2022; одобрена после рецензирования 11.04.2022; принята к публикации 12.05.2022.

The article was submitted 29.03.2022; approved after reviewing 11.04.2022; accepted for publication 12.05.2022.