УДК 519.8(075.8)

КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ГОМОРИ

Борис Игнатьевич Смагин

доктор экономических наук, профессор

bismagin@mail.ru

Владимир Викторович Машин

старший преподаватель

mvv@mgau.ru

Мичуринский государственный аграрный университет

г. Мичуринск, Россия

Аннотация. В статье рассмотрен алгоритм и проведен критический анализ решения задачи целочисленного линейного программирования методом Гомори. Показан ограничительный характер этого метода, состоящий в том, что даже в том случае, когда имеется целочисленное решение алгоритм Гомори может его не обнаружить.

Ключевые слова: метод Гомори, линейное программирование, целочисленность, симплексный метод, двойственный симплексный метод

Значительная часть экономических задач, относящаяся к задачам линейного программирования, требует целочисленного решения. К ним относятся задачи, у которых переменные величины означают количество единиц неделимой продукции.

Целочисленная оптимизация является основным математическим аппаратом исследования операций [1]. Задача целочисленного программирования формулируется так же, как и задача линейного программирования, но включается дополнительное требование, состоящее в том, что значения переменных, составляющих оптимальное решение, должны быть целыми неотрицательными числами.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0,\ x_j - целые,\ j = 1,2,\ldots,n$$

Если учесть требование целочисленности, то допустимое множество такой задачи будет представлять совокупность изолированных точек и, следовательно, не будет являться выпуклым. Если же добавить новые ограничения, связывающие граничные целочисленные точки, а затем в качестве многогранника решений использовать все выпуклое множество, ограниченное осями координат и новым контуром, то получим новую задачу линейного программирования, обладающую следующими свойствами [2]:

1. новый многогранник решений содержит все целые точки, заключавшиеся в первоначальном многограннике решений; любая его угловая точка является целочисленной;

2. так как целевая функция достигает оптимума в угловой точке области допустимых решений, то построением такого многогранника и обеспечивается целочисленность оптимального решения.

Методы целочисленной оптимизации можно разделить на три основные группы: 1) методы отсечения; 2) комбинированные методы; 3) приближенные методы. Среди методов отсечения наиболее распространенным является метод Гомори.

Метод решения поставленной задачи, предложенный Гомори, основан на симплексном методе и состоит в следующем. Решается задача линейного программирования без учета требования целочисленности (симплексным методом, либо его модификациями – методом искусственного базиса или двойственным симплексным методом). Если оптимальный план целочисленный, то вычисления заканчиваются; если же оптимальный план содержит хотя бы одну дробную компоненту, то накладывают дополнительное ограничение, учитывающее целочисленность переменных, и вычисления продолжают до получения нового оптимального плана. Если и он является нецелочисленным, то составляют следующее ограничение, учитывающее целочисленность. Процесс присоединения дополнительных ограничений продолжают до тех пор, пока либо будет найден целочисленный оптимальный план, либо будет доказано, что данная задача не имеет целочисленных планов. В соответствующей таблице это можно обнаружить в случае, когда для дробного значения $x_к$ (элемента, стоящего в столбце B) все коэффициенты соответствующей строки (a_{kj}) являются целыми числами.

Дополнительное ограничение, учитывающее требование целочисленности должно обладать следующими свойствами:

1) оно должно быть линейным;

2) должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;

3) не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Дополнительное ограничение, обладающее данными свойствами, называется правильным отсечением.

Алгоритм метода Гомори включает следующие этапы:

1) Задача линейного программирования решается без учета требования целочисленности. Если значения переменных оптимального плана являются целыми числами, то решение заканчивается.

2) Если среди элементов оптимального плана есть дробные числа, то необходимо выбрать элемент с наибольшей дробной частью и составить дополнительное ограничение (сечение), которое отсекает нецелочисленные решения.

Дополнительное ограничение формулируется в том случае, если значение базисной переменной ($x_i = b_i$) в оптимальном плане – дробное число. Тогда некоторые элементы a_{ij} в i-й строке симплексной таблицы должны быть также дробными числами. Обозначим $[b_i]$ и $[a_{ij}]$ целые части чисел b_i и a_{ij}, т.е. наибольшие целые числа, не превышающие b_i и a_{ij}. Величины дробных частей q_i и q_{ij} определяются как разности:

$q_i = b_i – [b_i]$; $q_{ij} = a_{ij} – [a_{ij}]$ и являются положительными числами.

Тогда неравенство $q_i – q_{i1}x_1 – q_{i2}x_2 – \dots – q_{in}x_n \le 0$, сформированное по i-й строке симплексной таблицы обладает всеми свойствами правильного отсечения.

3) Данное неравенство преобразуется в уравнение путем введения дополнительной неотрицательной переменной и включается в оптимальную симплексную таблицу.

4) Полученная расширенная задача решается двойственным симплексным методом. Если новый оптимальный план будет целочисленным, то задача решена. В противном случае следует вернуться к пункту 2 алгоритма.

Если в процессе решения в симплексной таблице появится уравнение с дробным свободным членом b_i и целыми коэффициентами a_{ij}, то данная задача не имеет целочисленного оптимального решения.

Пример 1. Решить задачу линейного целочисленного программирования:

$$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$– 3x_1 + 4x_2 \le 12$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 30$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ – целые числа.

Введя дополнительные переменные x_3 и x_4, приведем задачу к каноническому виду:

$$Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 30$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 4) \text{ – целые числа.}$$

Полученную задачу без учета целочисленности решаем симплексным методом.

Таблица 1

i	базис	C базиса	B	1 **A₁**	2 **A₂**	0 **A₃**	0 **A₄**
1	**A_3**	0	12	–3	4	1	0
2	**A_4**	0	30	3	4	0	1
m+1	$Z_j - C_j$		0	–1	–2	0	0
1	**A_3**	0	42	0	8	1	1
2	**A_1**	1	10	1	4/3	0	1/3
m+1	$Z_j - C_j$		10	0	–2/3	0	1/3
1	**A_2**	2	21/4	0	1	1/8	1/8
2	**A_1**	1	18	1	0	–1/6	1/6
m+1	$Z_j - C_j$		57/2	0	0	1/12	5/12

В таблице 1 на третьей итерации получен оптимальный план **X*** = (18; 21/4), в котором $x_2 = 21/4$ – дробное число.

По первому уравнению с переменной x_2, получившей нецелочисленное значение, составляем дополнительное ограничение:

$$q_1 - q_{11}x_1 - q_{12}x_2 - q_{13}x_3 - q_{14}x_4 \leq 0;$$

$$q_1 = b_1 - [b_1] = 21/4 - 5 = 1/4;$$

$$q_{11} = a_{11} - [a_{11}] = 0 - 0 = 0;$$

$$q_{12} = a_{12} - [a_{12}] = 1 - 1 = 0;$$

$$q_{13} = a_{13} - [a_{13}] = 1/8 - 0 = 1/8;$$

$$q_{14} = a_{14} - [a_{14}] = 1/8 - 0 = 1/8.$$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$1/4 - (1/8)x_3 - (1/8)x_4 \leq 0.$$

Введя дополнительную переменную x_5, преобразуем данное неравенство в уравнение:

$$1/4 – (1/8)x_3 – (1/8)x_4 + x_5 = 0,$$

коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.

Таблица 2

i	базис	C базиса	B	1 **A₁**	2 **A₂**	0 **A₃**	0 **A₄**	0 **A₅**
1	$\mathbf{A_2}$	2	21/4	0	1	1/8	1/8	0
2	$\mathbf{A_1}$	1	18	1	0	–1/6	1/6	0
3	$\mathbf{A_5}$	0	–1/4	0	0	–1/8	–1/8	1
m+1	$Z_j – C_j$		57/2	0	0	1/12	5/12	0
1	$\mathbf{A_2}$	2	5	0	1	0	0	1
2	$\mathbf{A_1}$	1	55/3	1	0	0	1/3	–4/3
3	$\mathbf{A_3}$	0	2	0	0	1	1	–8
m+1	$Z_j – C_j$		85/3	0	0	0	1/3	2/3

Применяя алгоритм двойственного симплексного метода, проводим одну итерацию, в результате которой получаем решение: **X*** = (55/3; 5), в котором x_1 = 55/3 – дробное число.

По второму уравнению с переменной x_1, получившей нецелочисленное значение, составляем дополнительное ограничение:

$$q_2 – q_{21}x_1 – q_{22}x_2 – q_{23}x_3 – q_{24}x_4 – q_{25}x_5 \le 0;$$

$$q_2 = b_2 – [b_2] = 55/3 – 18 = 1/3;$$

$$q_{21} = a_{21} – [a_{21}] = 1 – 1 = 0;$$

$$q_{22} = a_{22} – [a_{22}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{23} = a_{23} – [a_{23}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{24} = a_{24} – [a_{24}] = 1/3 – 0 = 1/3;$$

$$q_{25} = a_{25} – [a_{25}] = -4/3 – (-2) = 2/3$$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$1/3 – (1/3)x_4 – (2/3)x_5 \le 0.$$

Введя дополнительную переменную x_6, преобразуем данное неравенство в уравнение:

$$1/3 - (1/3)x_4 - (2/3)x_5 + x_6 = 0,$$

коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.

Таблица 3

i	базис	C базиса	B	1 **A1**	2 **A2**	0 **A3**	0 **A4**	0 **A5**	0 **A6**
1	**A_2**	2	5	0	1	0	0	1	0
2	**A_1**	1	55/3	1	0	0	1/3	–4/3	0
3	**A_3**	0	2	0	0	1	1	–8	0
4	**A_6**	0	–1/3	0	0	0	–1/3	–2/3	1
m+1	$Z_j - C_j$		85/3	0	0	0	1/3	2/3	0
1	**A_2**	2	5	0	1	0	0	1	0
2	**A_1**	1	18	1	0	0	0	–2	1
3	**A_3**	0	1	0	0	1	0	–10	3
4	**A_4**	0	1	0	0	0	1	2	–3
m+1	$Z_j - C_j$		28	0	0	0	0	0	1

Применяя алгоритм двойственного симплексного метода, проводим одну итерацию, в результате которой получаем оптимальное целочисленное решение: **X*** = (18; 5), в котором Z_{max} = 28.

Наиболее существенным недостатками метода Гомори являются плохая сходимость к целочисленному решению и нерегулярность вычислительной процедуры. Кроме того, требование целочисленности накладывается на значения всех переменных: как основных, так и дополнительных (которые, как правило, могут быть и дробными величинами).

В качестве примера рассмотрим решение задачи целочисленного программирования методом Гомори, которая, содержит три ограничения.

Пример 2. Решить задачу линейного целочисленного программирования:

$$Z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$5x_1 + 4x_2 \le 516$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 420$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \text{ – целые числа.}$$

Введя дополнительные переменные x_3 и x_4, приведем задачу к каноническому виду:

$$Z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$5x_1 + 4x_2 + x_3 = 516$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 420$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,\ldots 4) \text{ – целые числа.}$$

Полученную задачу без учета целочисленности решаем симплексным методом.

Таблица 4

i	базис	С базиса	В	5 **A_1**	6 **A_2**	0 **A_3**	0 **A_4**
1	**A_3**	0	516	5	4	1	0
2	**A_4**	0	420	2	5	0	1
m+1	$Z_j – C_j$		0	–5	-6	0	0
1	**A_3**	0	180	17/5	0	1	–4/5
2	**A_2**	6	84	2/5	1	0	1/5
m+1	$Z_j – C_j$		504	–13/5	0	0	6/5
1	**A_1**	5	900/17	1	0	5/17	–4/17
2	**A_2**	6	1068/17	0	1	–2/17	5/17
m+1	$Z_j – C_j$		10908/17	0	0	13/17	10/17

В таблице 4 на третьей итерации получен оптимальный план **X*** = (900/17; 1068/17), в котором x_1 = 900/17 и x_2 = 1068/17 – дробные числа.

По первому уравнению с переменной x_1, получившей нецелочисленное значение с наибольшей дробной частью (16/17), составляем дополнительное ограничение:

$$q_1 – q_{11}x_1 – q_{12}x_2 – q_{13}x_3 – q_{14}x_4 \leq 0;$$

$$q_1 = b_1 – [b_1] = 900/17 – 52 = 16/17;$$

$$q_{11} = a_{11} – [a_{11}] = 1 – 1 = 0;$$

$$q_{12} = a_{12} – [a_{12}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{13} = a_{13} – [a_{13}] = 5/17 – 0 = 5/17;$$

$$q_{14} = a_{14} – [a_{14}] = – 4/17 + 1 = 13/17.$$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$16/17 – (5/17)x_3 – (13/17)x_4 \leq 0.$$

Введя дополнительную переменную x_5, преобразуем данное неравенство в уравнение:

$$16/17 - (5/17)x_3 - (13/17)x_4 + x_5 = 0,$$

коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.

Таблица 5.

i	базис	C базиса	B	5 **A**$_1$	6 **A**$_2$	0 **A**$_3$	0 **A**$_4$	0 **A**$_5$
1	**A**$_1$	5	900/17	1	0	5/17	–4/17	0
2	**A**$_2$	6	1068/17	0	1	–2/17	5/17	0
3	**A**$_5$	0	–16/17	0	0	–5/17	–13/17	1
m+1	$Z_j - C_j$		10908/17	0	0	13/17	10/17	0
1	**A**$_1$	5	692/13	1	0	5/13	0	–4/13
2	**A**$_2$	6	812/13	0	1	–3/13	0	5/13
3	**A**$_4$	0	16/13	0	0	5/13	1	–17/13
m+1	$Z_j - C_j$		8332/13	0	0	7/13	0	10/13

Применяя алгоритм двойственного симплексного метода, проводим одну итерацию, в результате которой получаем решение:

$$x_1 = \frac{692}{13} = 53\frac{3}{13};\ x_2 = \frac{812}{13} = 62\frac{6}{13};\ x_3 = 0;\ x_4 = \frac{16}{13} = 1\frac{3}{13};\ x_5 = 0.$$

По второму уравнению с переменной x_2, имеющей наибольшую дробную часть, составляем дополнительное ограничение:

$$q_2 - q_{21}x_1 - q_{22}x_2 - q_{23}x_3 - q_{24}x_4 - q_{25}x_5 \le 0;$$

$$q_2 = b_2 - [b_2] = 812/13 - 62 = 6/13;\ q_{21} = a_{21} - [a_{21}] = 0 - 0 = 0;$$

$$q_{22} = a_{22} - [a_{22}] = 1 - 1 = 0;\ q_{23} = a_{23} - [a_{23}] = -3/13+1 = 10/13;$$

$$q_{24} = a_{24} - [a_{24}] = 0 - 0 = 0;$$

$$q_{25} = a_{25} - [a_{25}] = 5/13 - 0 = 5/13.$$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$6/13 - (10/13)x_3 - (5/13)x_5 \le 0.$$

Введя дополнительную переменную x_6, преобразуем данное неравенство в уравнение:

$$6/13 - (10/13)x_3 - (5/13)x_5 + x_6 = 0,$$

коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.

Таблица 6

i	базис	C базиса	B	5 **A_1**	6 **A_2**	0 **A_3**	0 **A_4**	0 **A_5**	0 **A_6**
1	**A_1**	5	692/13	1	0	5/13	0	-4/13	0
2	**A_2**	6	812/13	0	1	-3/13	0	5/13	0
3	**A_4**	0	16/13	0	0	5/13	1	-17/13	0
4	**A_6**	0	-6/13	0	0	-10/13	0	-5/13	1
m+1	$Z_j - C_j$		8332/13	0	0	7/13	0	10/13	0
1	**A_1**	5	53	1	0	0	0	-1/2	1/2
2	**A_2**	6	313/5	0	1	0	0	1/2	-3/10
3	**A_4**	0	1	0	0	0	1	-3/2	1/2
4	**A_3**	0	3/5	0	0	1	0	1/2	-13/10
m+1	$Z_j - C_j$		3203/5	0	0	0	0	1/2	7/10

Применяя алгоритм двойственного симплексного метода, проводим одну итерацию, в результате которой получаем решение:

$$x_1 = 53;\ x_2 = \frac{313}{5} = 62\frac{3}{5};\ x_3 = \frac{3}{5};\ x_4 = 1;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0.$$

По второму уравнению с переменной x_2, получившей нецелочисленное значение с наибольшей дробной частью, составляем дополнительное ограничение:

$$q_2 – q_{21}x_1 – q_{22}x_2 – q_{23}x_3 – q_{24}x_4 – q_{25}x_5 – q_{26}x_6 \le 0;$$

$$q_2 = b_2 – [b_2] = 313/5 – 62 = 3/5;$$

$$q_{21} = a_{21} – [a_{21}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{22} = a_{22} – [a_{22}] = 1 – 1 = 0;$$

$$q_{23} = a_{23} – [a_{23}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{24} = a_{24} – [a_{24}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{25} = a_{25} – [a_{25}] = 1/2 – 0 = 1/2;$$

$$q_{26} = a_{26} – [a_{26}] = – 3/10 + 1 = 7/10.$$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$3/5 – (1/2)x_5 – (7/10)x_6 \le 0.$$

Введя дополнительную переменную x_7, преобразуем данное неравенство в уравнение:

$$3/5 – (1/2)x_5 – (7/10)x_6 + x_7 = 0,$$

коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.

Таблица 7

i	базис	C базиса	B	5	6	0	0	0	0	0
				A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**
1	**A1**	5	53	1	0	0	0	-1/2	1/2	0
2	**A2**	6	313/5	0	1	0	0	1/2	-3/10	0
3	**A4**	0	1	0	0	0	1	-3/2	1/2	0
4	**A3**	0	3/5	0	0	1	0	1/2	-13/10	0
5	**A7**	0	-3/5	0	0	0	0	-1/2	-7/10	1
m+1	$Z_j – C_j$		3203/5	0	0	0	0	1/2	7/10	0
1	**A1**	5	268/5	1	0	0	0	0	6/5	-1
2	**A2**	6	62	0	1	0	0	0	-1	1
3	**A4**	0	14/5	0	0	0	1	0	13/5	-3
4	**A3**	0	0	0	0	1	0	0	-2	1
5	**A5**	0	6/5	0	0	0	0	1	7/5	-2
m+1	$Z_j – C_j$		640	0	0	0	0	0	0	1

Применяя алгоритм двойственного симплексного метода, проводим одну итерацию, в результате которой получаем решение:

$$x_1 = \frac{268}{5} = 53\frac{3}{5};\ x_2 = 62;\ x_3 = 0;\ x_4 = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5};\ x_5 = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5};\ x_6 = 0;\ x_7 = 0.$$

По третьему уравнению с переменной x_4, получившей нецелочисленное значение с наибольшей дробной частью, составляем дополнительное ограничение:

$$q_3 – q_{31}x_1 – q_{32}x_2 – q_{33}x_3 – q_{34}x_4 – q_{35}x_5 – q_{36}x_6 – q_{37}x_7 \le 0;$$

$$q_3 = b_3 – [b_3] = 14/5 – 2 = 4/5;$$

$$q_{31} = a_{31} – [a_{31}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{32} = a_{32} – [a_{32}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{33} = a_{33} – [a_{33}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{34} = a_{34} – [a_{34}] = 1 – 1 = 0;$$

$$q_{35} = a_{35} – [a_{35}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{36} = a_{36} – [a_{36}] = 13/5 – 2 = 3/5;$$

$$q_{37} = a_{37} – [a_{37}] = – 3 +3 = 0.$$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$4/5 – (1/5)x_6 \le 0.$$

Введя дополнительную переменную x_8, преобразуем данное неравенство в уравнение:

$$4/5 – (1/5)x_6 + x_8 = 0,$$

коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.

Таблица 8

i	базис	С базиса	B	5	6	0	0	0	0	0	0
				A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	**A_8**
1	**A_1**	5	268/5	1	0	0	0	0	6/5	-1	0
2	**A_2**	6	62	0	1	0	0	0	-1	1	0
3	**A_4**	0	14/5	0	0	0	1	1	26/5	-3	0
4	**A_3**	0	0	0	0	1	0	0	-2	1	0
5	**A_5**	0	6/5	0	0	0	0	0	7/5	-2	0
6	**A_8**	0	-4/5	0	0	0	0	0	-1/5	0	1
m+1	$Z_j – C_j$		640	0	0	0	0	0	0	1	0
1	**A_1**	5	3442/65	1	0	0	-3/13	0	0	-4/13	0
2	**A_2**	6	813/13	0	1	0	5/26	0	0	11/26	0
3	**A_6**	0	7/13	0	0	0	5/26	0	1	-15/26	0
4	**A_3**	0	14/13	0	0	1	5/13	0	0	-2/13	0
5	**A_5**	0	29/65	0	0	0	-7/26	1	0	-31/26	0
6	**A_8**	0	-9/13	0	0	0	1/26	0	0	-3/26	1
m+1	$Z_j – C_j$		640	0	0	0	0	0	0	1	0
1	**A_1**	5	268/5	1	0	0	0	0	6/5	-1	0
2	**A_2**	6	62	0	1	0	0	0	-1	1	0
3	**A_4**	0	14/5	0	0	0	1	1	26/5	-3	0
4	**A_3**	0	0	0	0	1	0	0	-2	1	0
5	**A_5**	0	6/5	0	0	0	0	0	7/5	-2	0
6	**A_8**	0	-4/5	0	0	0	0	0	-1/5	0	1
m+1	$Z_j – C_j$		640	0	0	0	0	0	0	1	0

Применяя алгоритм двойственного симплексного метода, проводим две итерации, в результате которой получаем решение:

$$x_1 = \frac{268}{5} = 53\frac{3}{5};\ x_2 = 62;\ x_3 = 0;\ x_4 = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5};\ x_5 = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5};\ x_6 = 0;\ x_7 = 0;\ x_8 = -\frac{4}{5}.$$

Таким образом, происходит зацикливание, т.е. вычисления, проведенные в таблице 8 будут осуществляться бесконечно и целочисленное решение не будет получено.

В таблице 8 при проведении второй итерации можно в качестве разрешающего элемента выбрать элемент $a_{67} = – 3/26$:

Таблица 9

i	базис	С базиса	B	5	6	0	0	0	0	0	0
				A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	**A_8**
1	**A_1**	5	3442/65	1	0	0	-3/13	0	0	-4/13	0
2	**A_2**	6	813/13	0	1	0	5/26	0	0	11/26	0
3	**A_6**	0	7/13	0	0	0	5/26	0	1	-15/26	0
4	**A_3**	0	14/13	0	0	1	5/13	0	0	-2/13	0
5	**A_5**	0	29/65	0	0	0	-7/26	1	0	-31/26	0
6	**A_8**	0	-9/13	0	0	0	1/26	0	0	-3/26	1
m+1	$Z_j – C_j$		640	0	0	0	0	0	0	1	0
1	**A_1**	5	274/5	1	0	0	-1/3	0	0	0	-8/3
2	**A_2**	6	60	0	1	0	1/3	0	0	0	11/3
3	**A_6**	0	4	0	0	0	0	0	1	0	-5
4	**A_3**	0	2	0	0	1	1/6	0	0	0	-4/3
5	**A_5**	0	38/5	0	0	0	-2/3	1	0	0	-31/3
6	**A_7**	0	6	0	0	0	-1/3	0	0	1	-26/3
m+1	$Z_j – C_j$		634	0	0	0	1/3	0	0	0	26/3

Применяя алгоритм двойственного симплексного метода, проводим одну итерацию, в результате которой получаем решение:

$$x_1 = \frac{274}{5} = 54\frac{4}{5};\ x_2 = 60;\ x_3 = 2;\ x_4 = 0;\ x_5 = \frac{38}{5} = 7\frac{3}{5};\ x_6 = 4;\ x_7 = 6;\ x_8 = 0.$$

По первому уравнению с переменной x_1, получившей нецелочисленное значение с наибольшей дробной частью, составляем дополнительное ограничение:

$$q_1 – q_{11}x_1 – q_{12}x_2 – q_{13}x_3 – q_{14}x_4 – q_{15}x_5 – q_{16}x_6 – q_{17}x_7 – q_{18}x_8 \le 0;$$

$$q_1 = b_1 – [b_1] = 274/5 – 54 = 4/5;$$

$$q_{11} = a_{11} – [a_{11}] = 1 – 1 = 0;$$

$$q_{12} = a_{12} – [a_{12}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{13} = a_{13} – [a_{13}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{14} = a_{14} – [a_{14}] = – 1/3 + 1 = 2/3;$$

$$q_{15} = a_{15} – [a_{15}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{16} = a_{16} – [a_{16}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{17} = a_{17} – [a_{17}] = 0 – 0 = 0;$$

$$q_{18} = a_{18} – [a_{18}] = – 8/3 + 3 = 1/3.$$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$4/5 – (2/3)x_4 – (1/3)x_8 \le 0.$$

Введя дополнительную переменную x_9, преобразуем данное неравенство в уравнение:

$$4/5 - (2/3)x_4 - (1/3)x_8 + x_9 = 0,$$

коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.

Таблица 10

i	базис	C базиса	B	5	6	0	0	0	0	0	0	**0**
				A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	**A_8**	**A_9**
1	**A_1**	5	274/5	1	0	0	-1/3	0	0	0	-8/3	0
2	**A_2**	6	60	0	1	0	1/3	0	0	0	11/3	0
3	**A_6**	0	4	0	0	0	0	0	1	0	-5	0
4	**A_3**	0	2	0	0	1	1/6	0	0	0	-4/3	0
5	**A_5**	0	38/5	0	0	0	-2/3	1	0	0	-31/3	0
6	**A_7**	0	6	0	0	0	-1/3	0	0	1	-26/3	0
7	**A_9**	0	-4/3	0	0	0	-2/3	0	0	0	-1/3	1
m+1	$Z_j - C_j$		634	0	0	0	1/3	0	0	0	26/3	0
1	**A_1**	5	832/15	1	0	0	0	0	0	0	-5/2	-1/2
2	**A_2**	6	178/3	0	1	0	0	0	0	0	7/2	1/2
3	**A_6**	0	4	0	0	0	0	0	1	0	-5	0
4	**A_3**	0	5/3	0	0	1	0	0	0	0	-17/12	1/4
5	**A_5**	0	134/15	0	0	0	0	1	0	0	-10	-1
6	**A_7**	0`	20/3	0	0	0	0	0	0	1	-17/2	-1/2
7	**A_4**	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1/2	-3/2
m+1	$Z_j - C_j$		1900/3	0	0	0	0	0	0	0	17/2	1/2

Так как в процессе решения в симплексной таблице появилось уравнение с нецелым свободным членом (134/15) и целыми коэффициентами a_{5j}, то данная задача не имеет целочисленного оптимального решения.

В то же время легко видеть, что при отбрасывании дробных частей в значениях x_1 и x_2, получаем целочисленное решение $x_1 = 55$; $x_2 = 59$, при котором $z = 629$. Таким образом, имеется некоторое целочисленное решение, которое не обнаруживает метод Гомори.

Следует отметить, что ни один тип отсечений не обеспечивает высокой эффективности соответствующих вычислительных процедур. Более того, опыт показывает, что даже некоторые задачи сравнительно небольшой размерности не могут быть решены с помощью методов отсечений.

Список литературы:

1. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. – М.: Мир, 1973. – 304с.

2. Смагин Б.И. Экономико-математические методы: учебник для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 272с.

UDC 519.8(075.8)

CRITICAL ANALYSIS OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF INTEGER LINEAR PROGRAMMING BY THE GOMORI METHOD

Boris I. Smagin

Doctor of Economics, Professor

bismagin@mail.ru

Vladimir V. Mashin

senior lecturer

mvv@mgau.ru

Michurinsk State Agrarian University

Michurinsk, Russia

Abstract. The article considers the algorithm and provides a critical analysis of the solution of the problem of integer linear programming by the Gomori method. The restrictive nature of this method is shown, consisting in the fact that even in the case when there is an integer solution, the Gomori algorithm may not detect it.

Keywords: Gomori method, linear programming, integers, simplex method, dual simplex method.

Статья поступила в редакцию 15.02.2022; одобрена после рецензирования 10.03.2022; принята к публикации 25.03.2022.

The article was submitted 15.02.2021; approved after reviewing 10.03.2022; accepted for publication 25.03.2022.