УДК 517.9

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА MAPLE

Смагин Борис Игнатьевич

доктор экономических наук, профессор

bismagin@mail.ru

Мичуринский государственный аграрный университет

г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Дифференциальные уравнения находят самое широкое применение в различных сферах человеческой деятельности.

В данной статье рассмотрены методы решения дифференциальных уравнений, с разделенными и разделяющимися переменными. Рассмотренные примеры и графики решения задачи Коши реализованы в пакете Maple.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, программа Maple, начальные условия, задача Коши, график решения.

Широкий класс дифференциальных уравнений составляют уравнения с разделенными и разделяющимися переменными [1].

Дифференциальные уравнения вида

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx \qquad (1)$$

называются уравнениями с разделенными переменными. Функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ будем считать непрерывными.

Предположим, что y(x) является решением этого уравнения, тогда при подстановке y(x) в уравнение (1) получим тождество, интегрируя которое, будем иметь

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + c, \qquad (2)$$

где c – произвольная постоянная.

Конечное уравнение Φ(x,y) = 0, которое определяет решение y(x) дифференциального уравнения как неявную функцию x, называется интегралом рассматриваемого дифференциального уравнения.

Если это конечное уравнение определяет все без исключения решения данного дифференциального уравнения, то оно называется общим интегралом рассматриваемого дифференциального уравнения. Следовательно, уравнение (2) является общим интегралом уравнения (1). Для того чтобы уравнение (2) определяло y как неявную функцию x, достаточно потребовать, чтобы $f_2(y) \neq 0$.

Если надо выделить частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, то оно, очевидно определится из уравнения

$$\int_{y_0}^{y} f_2(y)dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)dx$$

Пример 1. $xdx + ydy = 0.$

Переменные разделены, т.к. коэффициент при dx является функцией только x, а коэффициент при dy является функцией только y. Интегрируя, получим

$$\int x dx + \int y dy = c \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1^2$$

Найдем теперь частное решение данного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях (задача Коши): y(x=0) =3.

При x = 0, имеем $y^2 = c_1^2 = 9 \Rightarrow c_1 = 3$, и частное решение имеет вид:

$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$.

На практике решение дифференциальных уравнений довольно часто осуществляется с использование математических пакетов, особую роль среди которых играет программа Maple [2].

Решение примера 1 в пакете Maple. Задаем уравнение в виде: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

```
> eq1:=diff(y(x),x)=-x/y(x);
```

$$\frac{d}{dx} y(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

Решаем уравнение с помощью функции dsolve

> $dsolve(eq1, y(x));$

$$y(x) = \sqrt{-x^2 + \_C1}, y(x) = -\sqrt{-x^2 + \_C1}$$

Найдем теперь решение задачи Коши при заданных начальных условиях: y(0)=3.Задаем начальное условие

> $ics := y(0) = 3;$

$$y(0) = 3$$

Решаем уравнение с начальным условием

> $dsolve(\{eq1, ics\});$

$$y(x) = \sqrt{-x^2 + 9}$$

Строим поле направлений и выделяем искомую интегральную кривую (Рис. 1.)

> $with(DEtools) :$

$DEplot(eq1, y(x), x=-3..3, \{y(0)=3\}, linecolor=black, stepsize=.05, color=black);$

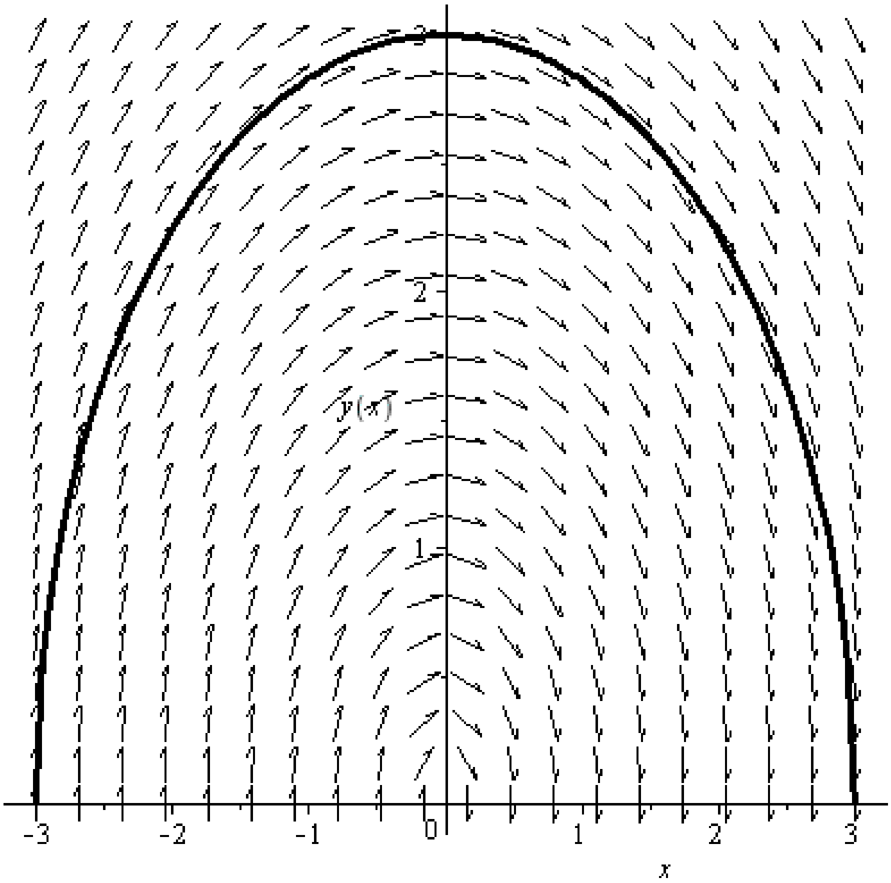

Рисунок 1 - График решения задачи Коши $xdx + ydy = 0;\ y(0) = 3.$

Пример 2. $e^{x^2}dx = \dfrac{dy}{\ln y}$. Интегрируя, получаем

$$\int e^{x^2}dx = \int \frac{dy}{\ln y} + c.$$

Интегралы $\int e^{x^2}dx$ и $\int \dfrac{dy}{\ln y}$ не берутся в элементарных функциях, тем не менее, исходное уравнение считается проинтегрированным, т.к. задача доведена до квадратур.

Уравнения вида $\varphi_1(x)\cdot\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\cdot\psi_2(y)dy$ называются уравнениями с разделяющимися переменными, т.к. путем деления на $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$ они приводятся к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy \Rightarrow \int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy$$

Заметим, что деление на $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$ может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$, а если функции $\psi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ могут быть разрывными, то возможно появление лишних решений, обращающих в нуль множитель $\dfrac{1}{\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)}$.

Пример 3. Решить уравнение: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

Из исходного уравнения имеем: $xdy = ydx$. Поделив обе части полученного уравнения на xy, имеем: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$, откуда $\ln y = \ln x + \ln C$, т.е. $y = Cx$.

Решение примера 3 в пакете Maple. Задаем уравнение в виде: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

> $eq2 := diff(y(x), x) = \dfrac{y(x)}{x};$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = \frac{y(x)}{x}$$

Определяем тип дифференциального уравнения с помощью функции odeadvisor подпакета DEtools

> $with(DEtools) : odeadvisor(eq2);$

$$[\_separable]$$

Тип [_separable] является типом уравнения с разделяющимися переменными.

Решаем уравнение с помощью функции dsolve

> $dsolve(eq2, y(x));$

$$y(x) = \_C1\,x$$

Пример 4. $x\left(1+y^2\right)dx = y\left(1+x^2\right)dy$

Поделив обе части исходного уравнения на $\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)$, получим $\dfrac{xdx}{1+x^2} = \dfrac{ydy}{1+y^2}$, откуда $\displaystyle\int\frac{xdx}{1+x^2} = \int\frac{ydy}{1+y^2}$. Интегрируя получим $\ln\left(1+y^2\right) = \ln\left(1+x^2\right) + \ln C \Rightarrow 1+y^2 = C\left(1+x^2\right)$.

Найдем теперь частное решение данного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях (задача Коши): y(x=0) =1.

При x = 0, имеем 1 + y(0) = C, т.е. C = 2, и частное решение имеет вид:

$$1+y^2 = 2\left(1+x^2\right) \Rightarrow y^2 = 2x^2+1 \Rightarrow y = \sqrt{2x^2+1}.$$

Решение примера 4 в пакете Maple. Задаем уравнение в виде: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\left(1+y^2\right)}{y\left(1+x^2\right)}$.

$> eq3 := diff(y(x), x) = \dfrac{x\cdot\left(1+y(x)^2\right)}{y(x)\cdot\left(1+x^2\right)};$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = \frac{x\left(1+y(x)^2\right)}{y(x)\left(x^2+1\right)}$$

Определяем тип дифференциального уравнения с помощью функции odeadvisor подпакета DEtools

$> with(DEtools) : odeadvisor(eq3);$

$$[\_separable]$$

Тип [_separable] является типом уравнения с разделяющимися переменными.

Решаем уравнение с помощью функции dsolve

$> dsolve(eq3, y(x));$

$$y(x) = \sqrt{\_C1\,x^2 + \_C1 - 1},\ y(x) = -\sqrt{\_C1\,x^2 + \_C1 - 1}$$

Отличие найденного решения и решения, полученного в пакете Maple заключается в том, что в последнем случае функция y(x) получена в явном виде. Найдем теперь решение задачи Коши при заданных начальных условиях: y(0)=1.

Задаем начальное условие

> $ics := y(0) = 1;$

$$y(0) = 1$$

Решаем уравнение с начальным условием

> $dsolve(\{eq3, ics\});$

$$y(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$$

Строим поле направлений и выделяем искомую интегральную кривую (Рис. 2.)

> $with(DEtools):$

$DEplot(eq3, y(x), x = -5..5, \{y(0) = 1\}, linecolor = black, stepsize = .05, color = black);$

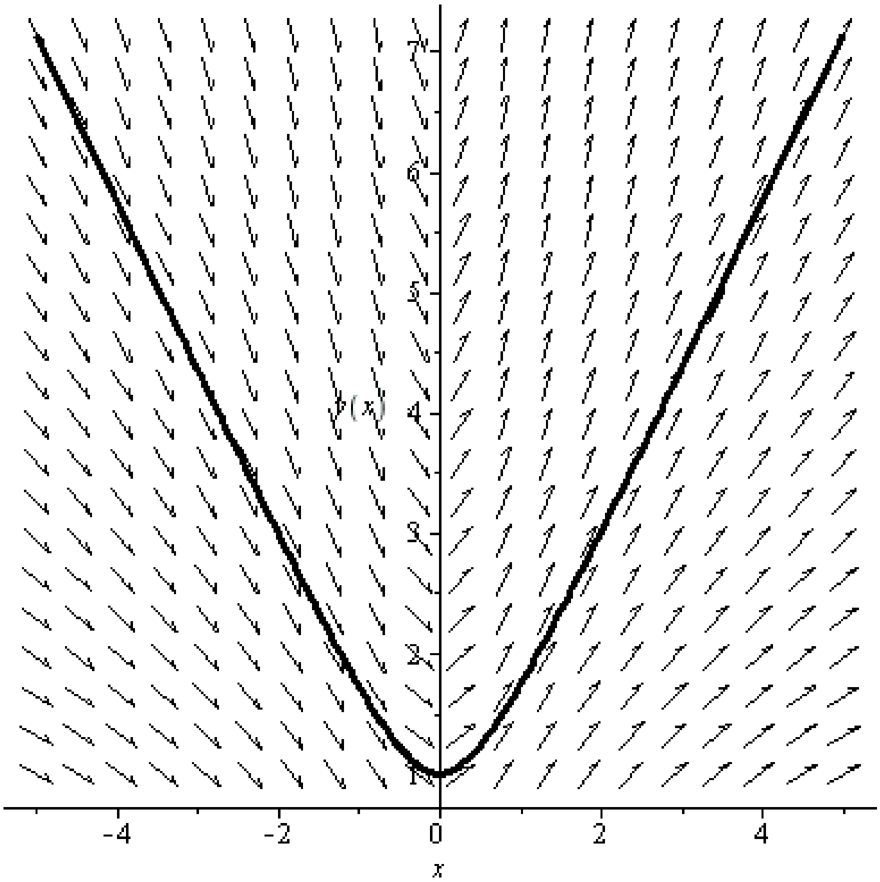

Рисунок 2 - График решения задачи Коши $x(1+y^2)dx = y(1+x^2)dy;\ y(0)=1.$

Список литературы:

1. Демидович, Б.П. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.П. Моденов. – 5- изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 280с.

2. Кирсанов, М.Н. Практика программирования в системе Maple/М.Н. Кирсанов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – 208с.

UDC 517.9

SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SEPARABLE VARIABLES USING THE MAPLE PACKAGE

Smagin Boris Ignatievich

Doctor of Economic Sciences, Professor

bismagin@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University

Michurinsk, Russia

Annotation. Differential equations are widely used in various fields of human activity. In this article, methods for solving differential equations with separated and separable variables are considered. The considered examples and graphs for solving the Cauchy problem are implemented in the Maple package.

Key words: differential equation, Maple program, initial conditions, Cauchy problem, solution graph.