**УДК 514**

# 11-Е ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

**Стариков Владимир Николаевич**
старший преподаватель,
Мичуринский государственный аграрный университет,
г. Мичуринск, Россия.
E-mail: vnst@mail.ru

**Аннотация.** Сообщаются новые теоремы для треугольника и четырехугольника.

**Ключевые слова**: геометрия, теоремы, треугольник, четырехугольник.

**Введение.** В настоящей работе введено сокращение слова: треугольник=**3-к,** четырехугольник=**4-к**. Также окружность здесь будет обозначаться перечислением в круглых скобках всех точек, через которые она проходит.

Пусть $A$, $B$, и $C$ – внутренние углы 3-ка или радианные меры этих углов, которые связаны формулой $A+B+C=\pi$. Пусть $a$, $b$, и $c$ – стороны 3-ка, лежащие против углов соответственно $A$, $B$, и $C$, $R$ – радиус описанной окружности, $S$ - площадь 3-ка.

**Результаты исследований.**

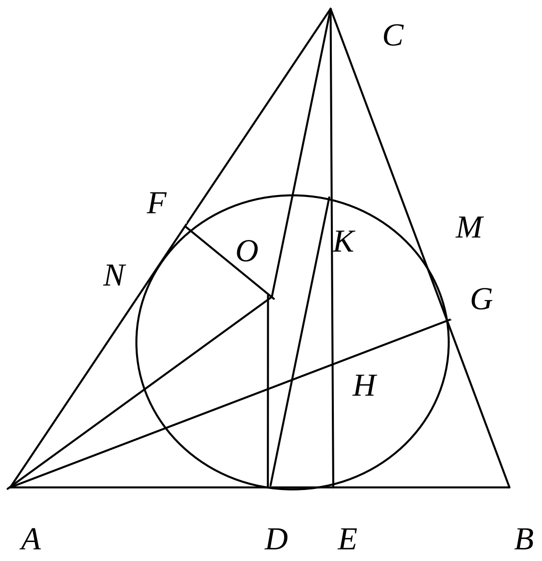

Рис. 1

**Уточнение теоремы Мавло с доказательством**. В нашем «*6-ом исследовании по геометрии*» без доказательства дано «*Уточнение теоремы Мавло*» для 3-ка $ABC$ [2]. Дадим здесь доказательство этого уточнения. На рис. 1 5 в 3-ке $ABC$ $CE$ и $AG$ – *высоты*, $O$ – центр описанной окружности $(A,B,C)$, $H$ – ортоцентр, $CO$ – часть *сивысоты*, $(D,E,G,M,K,F,N)$ – окружность Эйлера 3-ка $ABC$. Как известно, окружность Эйлера делит отрезок $CH$ пополам в точке $K$: $CK=KH$, $OD\perp AB$. Известно, что $OD= CH/2$, т.е. $OD= CK$, однако $OD||CK$. Следовательно, 4-к $ODKC$ – параллелограмм, поэтому $OC||DK$. Следовательно, $\angle OCK= \angle DKE$, как соответственные углы при параллельных прямых $OC$ и $DK$ при секущей $CE$. Но угол $\angle OCK$ между *высотой* $CE$ и *сивысотой* $CO$ равен $|\angle CAB-\angle ABC|$ (см. наше «10-*е исследование по геометрии*», параграф «*Угол между высотой и сивысотой, проведенными из одной вершины 3-ка*»). Следовательно, и равный ему угол $\angle DKE=|\angle CAB-\angle ABC|$, что и требовалось доказать. Сама же дуга $^{\cup}DE$, на которую опирается угол $\angle DKE$, вписанный в окружность Эйлера $(D,E,G,M,K,F,N)$, будет в 2 раза больше (в радианах). Следовательно, $^{\cup}DE=2|\angle CAB-\angle ABC|$, Аналогично для двух других дуг окружности Эйлера имеем $^{\cup}MG=2|\angle ACB-\angle ABC|$, $^{\cup}FN=2|\angle CAB-\angle ACB|$. Это и есть доказанное теперь уточнение теоремы Мавло. Уточнение теоремы состоит в том, что указаны конкретные выражения для дуг окружности Эйлера через модули разностей внутренних углов 3-ка *ABC*. Сама же теорема Мавло утверждает просто, что $2\cdot\max(\cup MG, \cup FN, \cup DE) = \cup MG + \cup FN + \cup DE$ и что наибольшая из трех дуг $\cup MG$, $\cup FN$ и $\cup DE$ равна двум оставшимся. Подставляя уточненные значения дуг $\cup MG$, $\cup FN$ и $\cup DE$, легко убеждаемся в справедливости теоремы Мавло. Заметим, что у нас осталось не доказанным утверждение: $OD = CH/2$. То что расстояние от центра *O* описанной окружности до стороны 3-ка вдвое меньше расстояния от ортоцентра до вершины, лежащей против этой стороны, можно найти например у Зетеля [1].

**Окружности, связанные окружностью Эйлера.** На рис. 2 в 3-ке *ABC*: *AF, BK, CE* – три высоты, *H* – ортоцентр, (*D,E, P, F,G, Q,K, M, N*) - окружность Эйлера. Если части хорд окружности Эйлера, проходящие через ортоцентр: *KH, QH, FH, PH, EH, NH,* являющиеся частями 3 высот, разделить в равной пропорции, считая от ортоцентра, то (в силу правила хорд), они будут лежать на одной окружности (см. 6 черных точек на рис. 2). Например, если эти отрезки разделить пополам, как показано черными точками на рис. 2, то стороны 3-ков *ABC, NPQ, ILV* попарно параллельны. Эти 3-ки подобны, и сходственная сторона предыдущего будет вдвое меньше следом идущего. Окружность (*D,E, P, F,G, Q,K, M, N*) будет описанной окружностью 3-ка *NPQ*, а

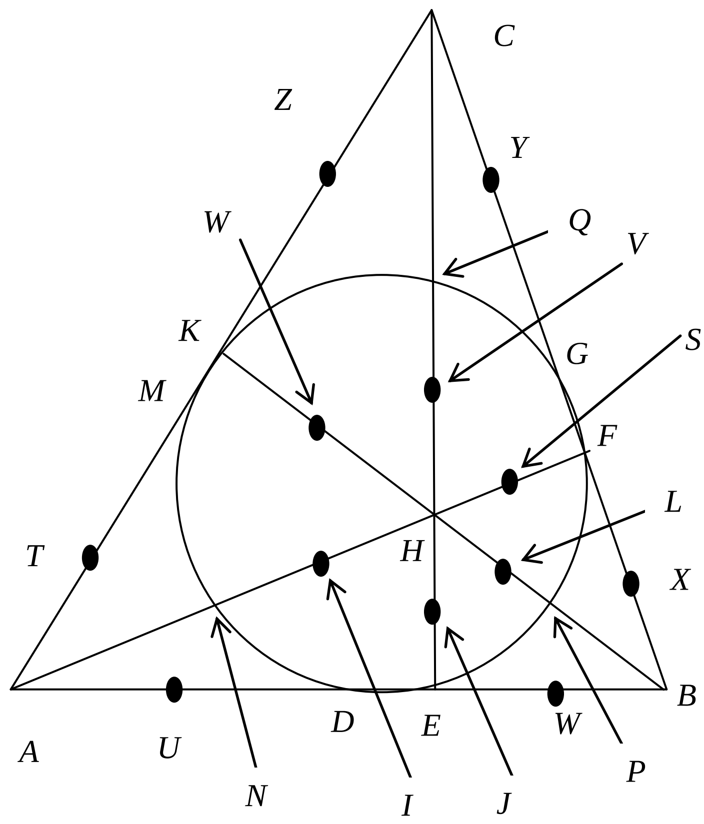


**Рис. 2**

окружность ($I,J,L,S,V,W$) будет окружностью Эйлера 3-ка $NPQ$. Следовательно, ее центр лежит на середине отрезка $HO_9$, где $O_9$ – центр окружности Эйлера 3-ка $ABC$, т.к. 3-ки $ABC$, $NPQ$, $ILV$ имеют общий ортоцентр $H$. 6 черных точек $T$, $U$, $W$, $X,Y,Z$ , будут лежать на одной окружности, если они пропорционально делят соответствующие отрезки сторон (см. 6 черных точек на рис. 2). Например, если эти отрезки разделить пополам, как показано черными точками на рис. 2. В этом случае $EW=WB$, $BX=XF$, $CZ=ZK$, $AU=UD$, $AT=TM$, $CY=YG$, и для окружности ($T$, $U$, $W$, $X,Y,Z$) выполняются правила секущих сторон от всех 3 вершин 3-ка $ABC$. Заметим, что на рис. 2 отрезки $QD$, $NG$, $PM$ являются диаметрами окружности Эйлера 3-ка $ABC$ и пересекаются все трое в их середине - в центре $O_9$ окружности Эйлера. В 6-ке $NDPGQ$ 3 пары противоположных сторон равны и одновременно параллельны, а. т. к. они одновременно вписаны в одну и туже окружность, то эти 3 пары сторон являются тремя парами противоположных сторон 3 различных прямоугольников, вписанных в 1 окружность Эйлера. В силу теоремы Мансиона (*о куриной лапке*), на рис. 2 $KQ=QF$, $PF=PE$, $NE=NK$. Т.е . 6-к $KQFPEN$, вписанный в окружность Эйлера, имеет 3 пары равных смежных (не противоположных) сторон. Шестью вершинами этого 6-ка являются 3 основания высот 3-ка $ABC$ и середины 3 *довысот* или *предвысот*, т.е. 3 отрезков, соединяющих ортоцентр с 3 вершинами 3-ка $ABC$.

**Выводы.** По-нашему мнению, рассмотренные вопросы будут полезны геометрам.

Литература:


1. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. // М.: Учпедгиз - 1962. С. 73, п. 57
2. Стариков В.Н. 6-е Исследование по геометрии // Наука и Образование. 2018. - № 2. С. 22.

UDC 514

# 11-TH RESEARCH ON GEOMETRY

**Starikov V. N.**,

major teacher.

Michurinsk State Agrarian University,

Russia, E-mail: vnst@mail.ru.

**Abstract**. It is described a new theorems of the triangle, the bilateral.

**Keywords** (Docuterm): the geometry, theorems . the triangle, the bilateral.