ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИЕМА РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ

Гарминович Н.А.,
к.ф.-м.н., доцент
Социально-педагогический институт
Кафедра безопасности жизнедеятельности
и медико-биологических дисциплин
ФГБОУ ВО Мичуринский ГАУ
г. Мичуринск, Россия

Аннотация: В статье рассматривается применение приема разбиения множества при решении практических задач по комбинаторике, площади многоугольника и делимости целых чисел. Объединение тем основано на общности и единообразии подхода к изложению теоретического материала и методических приемов при выполнении упражнений. Использование одного приема при изучении различных тем позволяет формировать у обучающихся способность к актуализации математических знаний и умений, к анализу математических действий.

Ключевые слова: Множество, разбиение, комбинаторика, многоугольники, площадь фигуры, делимость целых чисел, уравнение

Гарминович Н.А., krasaverenei@mail.ru

Современные методики стремятся к универсализации образования: использование одного приема при изучении различных тем, что, на наш взгляд, актуально при формировании математических знаний. Применение такого подхода позволяет, во-первых, не перегружать обучающихся различной информацией, без того очень обширной, и, во-вторых, развивает способность находить общее в разнородных, на первый взгляд, предметах изучения.

Для аргументации вышесказанного нами выбран прием «разбиение множеств», используемый при рассмотрении различных тем. Прежде чем перейти к конкретному описанию, необходимо остановиться на определении понятия «множество», так как оно является ключевым при изучении предложенных нами в качестве иллюстративного материала тем.

Понятие множества является одним из основных в современной математике. С определения множества начинается ее изучение в школе. Теория множеств связана с именем Георга Кантора, известного немецкого математика, по утверждению которого, множеством является любое собрание определённых и различных между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое [1]. При этом объекты любой природы, входящие в множество, понимаются как его элементы.

Разбиением множества M на классы называется такая система непустых подмножеств этого множества, что никакие два подмножества этой системы не имеют общих элементов, и объединение всех подмножеств составляет множество M.

Рассмотрим, как понятие разбиения множества определяется в комбинаторике и связано задачами о площадях многоугольников и делимостью целых чисел. Это объединение основано на общности и единообразии подхода к изложению материала по этим темам и методических приемов при решении практических задач разбиения множеств.

При изучении темы «Комбинаторные задачи» рассматриваем разбиение множества целых положительных чисел на классы, в соответствии с условием задачи, устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между заданными характеристиками и числами.

Например, определяя разбиение целого положительного числа A как представление его в виде суммы n слагаемых, считаем, сколькими способами можно поставить n черточек между A точками.

Решая задачу на определение количества целых чисел, меньших 10000, цифры которых идут в возрастающем порядке, мы разбиваем множество четырехзначных чисел с разными цифрами на классы, относим к одному классу числа, состоящие из одних и тех же цифр и отличающиеся порядком. Таких чисел - двадцать четыре. В каждом классе только одно число из 24-х будет иметь возрастающий порядок цифр. Всего чисел с четырьмя разными цифрами: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. Любое четырехзначное число попадает только в один из $\frac{5040}{24} = 210$ классов, и, следовательно, 210 чисел, меньших 10000 с возрастающим порядком цифр.

Таким образом, если элементы какого-то множества C удалось разбить на K классов $A_1, A_2, ..., A_k$ причем в каждом классе имеется M элементов, то в множестве C всего $N = M \cdot K$ элементов. Если N - основное множество, из которого выбираются элементы, то $C \leq N$, т.е. число элементов множества C не превышает число элементов множества N [2].

При изучении темы основное внимание уделяем определению основных приемов рассуждений и подсчетов, конкретным задачам, а не выведением общих формул комбинаторики.

Прием разбиения может и должен быть использован при изучении темы «Площади многоугольников».

Разбиением многоугольника называется представление его в виде частей, сумма площадей которых равна площади данного многоугольника.

В решении задач используем прием разрезания и складывания, основанный на свойствах площадей, а именно:

- площадь многоугольника - положительное число;

- площади конгруэнтных многоугольников равны;

- если многоугольник разрезан на несколько частей, то его площадь равна сумме площадей этих частей [3].

К задачам этой темы отнесем задачи на разрезание и складывание, на изменение площади многоугольников при его преобразованиях, на доказательство соотношений в геометрических фигурах, на геометрические неравенства.

Например, используя прием сравнения, основанный на разбиении, показываем, что

- площадь треугольника, образованного средними линиями исходного треугольника, равна $\frac{1}{4}$ площади исходного треугольника.

- середины сторон выпуклого четырехугольника образуют параллелограмм, площадь которого равна $\frac{1}{2}$ площади исходного четырехугольника.

Делаем вывод, что если последовательно соединить середины сторон выпуклого n- угольника, то площадь полученного многоугольника составляет не менее половины площади исходного.

Таким образом, при изучении площадей фигур прием разбиения базируется на условии, если два многоугольника равновелики, то один из них можно разрезать на части, из которых составляется другой многоугольник.

В качестве третьей нами выбрана тема «Разбиение множества целых чисел».

Разбиение множества целых чисел - это представление этого множества в виде классов, элементы которых при делении на m дают один из остатков $0,1,2,...,m-1$.

Например, при $m=5$, множество целых чисел оказывается разбитым на пять классов: к одному классу относятся числа, дающие при делении на 5 остаток 1, к другому - остаток 2, …, к пятому - делящиеся на 5 нацело.

Изображением на числовой оси множества чисел, дающих при делении на m один и тот же остаток, является множество точек, отстоящих друг от друга на расстоянии m.

Таким образом, любое целое число x можно представить в виде: $x = m \cdot t + r$, где $\mathrm{r} = 0,1,2,...,\mathrm{m}-1$. Элементы классов являются членами арифметической прогрессии с разностью m и первым членом r.

Прием разбиения множества целых чисел на классы можно использовать для решения уравнений с двумя переменными в целых числах.

Связь между решением уравнения и разбиением множества определяется на координатной плоскости, где устанавливается число частей, на которые точки с целыми координатами делят отрезок с концами в $(0,0)$ и (a,b).

Если целые числа a и b взаимно просты, то множество решений однородного уравнения $a \cdot y - b \cdot x = 0$ - это множество целых точек, лежащих прямой $a \cdot y = b \cdot x$, которые находятся по формуле: $a \cdot t = b \cdot t$.

Например, неоднородное уравнение $12 \cdot x - 20 \cdot y = 300$ имеет решение в целых числах, так как его правая часть делится на наибольший общий делитель чисел $(12,20) = 4$. Разделим обе части уравнения на 4, получим: $3 \cdot x - 5 \cdot y = 75$. Решением вспомогательное уравнение $3 \cdot x - 5 \cdot y = 1$, является пара чисел $(7,4)$. Тогда решением исходного уравнения является: $x_1 = 535 + 20 \cdot t, y_1 = 300 + 12 \cdot t$, где $t \in Z$. Проверка:

$$t = 0, x_1 = 525, y_1 = 300,$$
$$12 \cdot 525 - 20 \cdot 300 = 6300 - 6000 = 300$$

Использование одного приема при рассмотрении различных, на первый взгляд, математических тем обеспечивает иллюстрацию разнообразия подходов в обнаружение связей между различными понятиями и разнообразными способами решения задач. Результатом такого введения является познавательный интерес, который побуждает к самостоятельной и исследовательской работе обучающихся.

Литература

1. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах / Н.Я. Виленкин. - М., 2005. - 151 с.

2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика /Н.Я. Виленкин. - М., 1968. - 328 с.

3. Смирнов В.А. ЕГЭ 2018. Математика. Планиметрия: площади. Рабочая тетрадь / Под ред. А.Л. Семенова и Я.В. Ященко. - М., 2018.- 48 с.

USING THE TECHNIQUE OF SPLITTING A SET IN MATH CLASSES

Garminovich N.A.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Social and Teachers Training Institute
Department of Life Safety and Biomedical Disciplines
Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Summarry: The article discusses the application of the technique of partitioning a set in solving practical problems in combinatorics, the area of a polygon, and the divisibility of integers. The combination of topics is based on the commonality and uniformity of the approach to the presentation of theoretical material and methodological techniques for performing exercises. The use of one technique in the study of various topics allows students to form the ability to actualize mathematical knowledge and skills, to analyze mathematical actions.

Key words: Set, partition, combinatorics, polygons, area of a figure, divisibility of integers, equation