

УДК 51-73

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ДИСПЕРСНОЙ
ЧАСТИЦЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ СТОКСА, ОСНОВАННАЯ НА
ЛИНЕЙНОМ ОБЫКНОВЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ
УРАВНЕНИИ**

Дмитрий Алексеевич Тукмаков

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

tukmakovda@imm.knc.ru

Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр

Российской академии наук

г. Казань, Россия

Аннотация. В работе рассматривается скоростное воздействие потока несущей среды на дисперсную частицу как дифференциальный оператор от функции скорости дисперсной частицы. В качестве силы межфазного взаимодействия рассматривается сила Стокса, что позволяет свести математическую модель к обыкновенному неоднородному линейному дифференциальному уравнению. Получены решения уравнения динамики частицы для описания случаев гармонических и затухающих колебаний несущей среды. В работе исследовано влияние размера дисперсного включения на размах изменения скорости колебаний дисперсной частицы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, механика жидкости и газа, неоднородные среды, межфазное взаимодействие, сила Стокса.

Теория дифференциальных уравнений имеет широкий перечень приложений в различных областях физики [1-16]. Дифференциальные уравнения, описывающие динамические процессы в однородных сплошных средах [6-7] или неоднородных средах [8-10] имеют как аналитические [1-9, 14-16] так и численные решения [10-13].

В монографии [5] рассматривались различные вопросы колебаний в газе, изложены основы акустической теории неоднородных сил, описаны различные силы межфазного взаимодействия. Вопросы численного моделирования динамики газодисперсных сред рассмотрены в работах [11-12]. Численное моделирование динамики частиц в акустическом поле с использованием CFD пакетов рассмотрено в статье [13].

Актуальность работы состоит в том, что процессы движения дисперсных частиц в газах или жидкостях протекают в различных промышленных технологиях.

Новизна работы заключается в том, что исследуется динамика дисперсной частицы, движущейся под действием силы Стокса как в гармоническом, так и в затухающем гармоническом поле скорости несущей среды.

Целью работы являлось исследование физических свойств различных решений неоднородного дифференциального уравнения динамики дисперсной частицы, под действием силы Стокса.

Гармонические колебания несущей среды описываются уравнениями (1)-(3):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (1)$$

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (2)$$

$$u(t) = A\omega \cos(\omega t) \quad (3)$$

Здесь $x(t)$ – продольная координата, A – амплитуда ходжений поршня, t – время, ω – циклическая частота колебаний.

Затухающие циклические колебания описываются уравнениями (4)-(7):

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (4)$$

$$x(t) = A \sin(\omega_1 t) e^{-\delta t} \quad (5)$$

$$u(t) = A\omega_1 \cos(\omega_1 t) e^{-\delta t} - A\delta \sin(\omega_1 t) e^{-\delta t} \quad (6)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} \quad (7)$$

Где δ – коэффициент затухания, ω_1 – частота затухающих колебаний. Динамика дисперсной частицы определяется из предположения, что частица движется под действием силы Стокса [5], в уравнении константа a – коэффициент сопротивления (8) [5]:

$$m \frac{du_1}{dt} = a(u - u_1) \quad (8)$$

Здесь u_1 – скорость дисперсной частицы, m – масса частицы, a – коэффициент сопротивления частицы. В случае сферической частицы с диаметром d [5] уравнение (8) имеет вид (9), где ρ_1 – плотность материала частицы, μ – коэффициент динамической вязкости несущей среды:

$$\frac{\pi d^3 \rho_1}{6} \frac{du_1}{dt} = 6\pi d \mu (u - u_1) \quad (9)$$

В таком случае динамика частицы в потоке несущей среды определяется выражением (10):

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{36\mu}{\rho_1 d^2} (u - u_1) \quad (10)$$

Или при записи $\alpha = \frac{36\mu}{\rho_1 d^2}$ в виде (11):

$$\frac{du_1}{dt} = \alpha (u - u_1) \quad (11)$$

Исходя из уравнения (11) можно записать дифференциальный оператор [14] (12):

$$L(u_1) = \frac{du_1}{dt} + \alpha u_1 \quad (12)$$

В таком случае уравнение динамики частицы имеет вид (13):

$$L(u_1) = \alpha u \quad (13)$$

Неоднородная часть уравнения (13) учитывает параметры несущей среды и дисперсной частицы – скорость несущей среды, вязкость несущей среды, размер и плотность материала дисперсного включения. В случае гармонических колебаний (1)-(3) и затухающих колебаний (4)-(7) с помощью дифференциального оператора (12) уравнение динамики частицы имеет вид (14) и (15) соответственно:

$$L(u_1) = \alpha A \omega \cos(\omega t) \quad (14)$$

$$L(u_1) = \alpha A (\omega \cos(\omega_1 t) e^{-\delta t} - \delta \sin(\omega_1 t) e^{-\delta t}) \quad (15)$$

Решение уравнений (14) и (15) отыскивается методом вариации переменной [15]:

$$u_1(t) = e^{-\alpha t} \left(\int u(t) e^{\alpha t} dt \right) \quad (16)$$

В обоих случаях подынтегральными выражениями является произведение экспоненциальной и тригонометрической функций [16].

Решением уравнений (14) и (15) составляет (17) и (18) соответственно:

$$u_1(t) = A \alpha \omega (\alpha \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) / (\alpha^2 + \omega^2) + C \quad (17)$$

$$u_1(t) = A \alpha \omega_1 e^{-\delta t} (((\alpha - \delta) \cos(\omega_1 t) + \omega_1 \sin(\omega_1 t)) / ((\alpha - \delta)^2 + \omega_1^2)) + \\ + A \alpha \delta e^{-\delta t} (((\alpha - \delta) \sin(\omega_1 t) + \omega_1 \cos(\omega_1 t)) / ((\alpha - \delta)^2 + \omega_1^2)) + C \quad (18)$$

Здесь C – некоторая постоянная.

Решение неоднородного дифференциального уравнения складывается из частного решения однородного дифференциального уравнения и решения однородного дифференциального уравнения.

Решение однородного дифференциального уравнения $L(\tilde{u}_1) = \lambda \tilde{u}_1 \equiv 0$ является собственной функцией дифференциального оператора (12) для собственного значения $\lambda=0$, где u_{10} – некоторая начальная скорость:

$$\tilde{u}_1 = u_{10} e^{-\alpha x} \quad (19)$$

С учетом (19) и частных решений (14) и (15) общие для уравнения динамики частицы для гармонических и затухающих колебаний имеют вид (17*) и (18*) соответственно:

$$u_1(t) = u_{10}e^{-\alpha t} + A\alpha\omega(\alpha\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t))/(\alpha^2 + \omega^2) + C \quad (17^*)$$

$$u_1(t) = u_{10}e^{-\alpha t} + A\alpha\omega e^{-\delta t} (((\alpha - \delta)\cos(\omega_1 t) + \omega_1\sin(\omega_1 t))/((\alpha - \delta)^2 + \omega_1^2)) + A\alpha\delta e^{-\delta t} (((\alpha - \delta)\sin(\omega_1 t) + \omega_1\cos(\omega_1 t))/((\alpha - \delta)^2 + \omega_1^2)) + C \quad (18^*)$$

Выражения (3), (6), (16), (17), (16*), (17*) реализованы в виде компьютерной программы на языке программирования Fortran.

Общая схема моделируемого процесса колебаний дисперсной частицы изображена на рис.1.

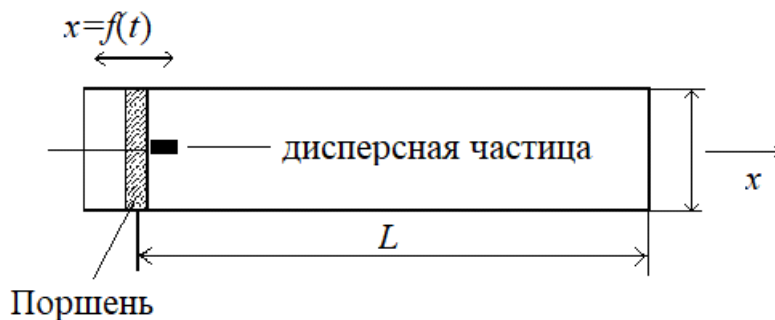


Рисунок 1 - Общая схема моделируемого процесса

Колебания осуществлялись на частоте первого линейного резонанса в продольном канале $\omega = \pi c/L$ [10], $L=1$ м – длина канала, где $c=330$ м/с – скорость звука в воздухе при комнатной температуре; $\mu=1.5 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\rho_1=1000$ кг/м³, амплитуда колебаний $A=0.001$ м, $f(x)=\sin(x)$, в уравнениях (3), (6) константа $C=0$.

Для частицы размером $d=10$ мкм при колебаниях несущей среды с размахом изменения скорости – $U \approx 1.2$ м/с, рис.2а, размах изменения скорости дисперсной частицы на порядок меньше – $U_1 \approx 0.12$ м/с, рис.2б.

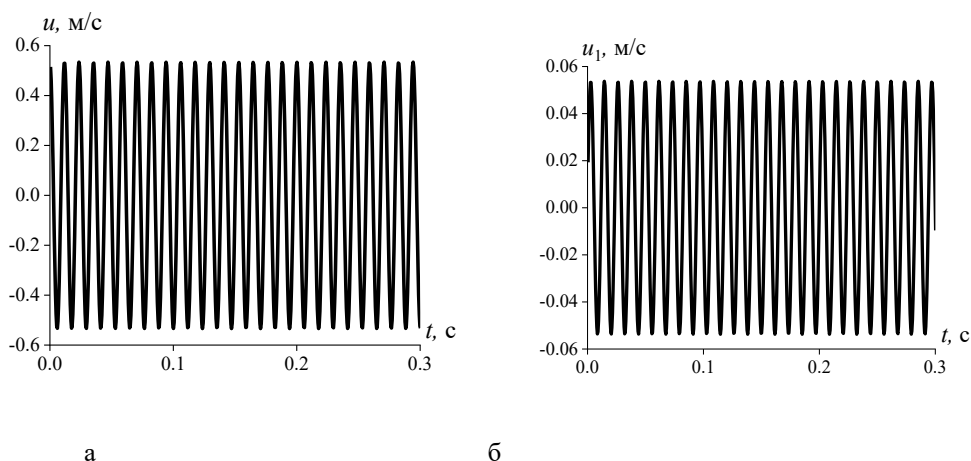


Рисунок 2 - Временная зависимость скорости газа – рис.2а и скорости дисперсной частицы – рис.2б

Для процесса затухающих колебаний с величиной параметра затухания $\delta=0.1$ для частицы с диаметром $d=100$ мкм при расчете динамики дисперсной частицы по формуле (18) размах изменения скорости дисперсной частицы на порядок меньше, чем амплитуда изменения скорости несущей среды (б) – рис.3 (а,б).

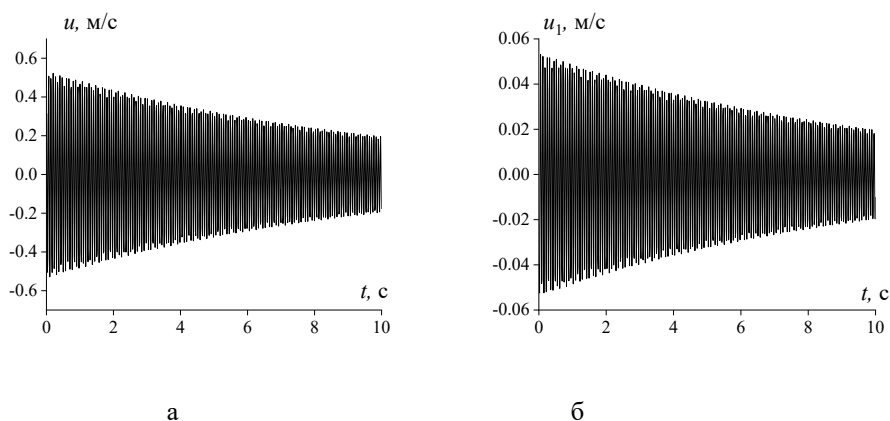


Рисунок 3 - Временная зависимость скорости газа – рис.3а и скорости дисперсной частицы – рис.3б

Расчеты демонстрируют, что при увеличении размера дисперсной частицы как при гармонических, так и при затухающих колебаниях происходит уменьшение амплитуды скорости дисперсного включения, что можно наблюдать на рис.4 (а-в).

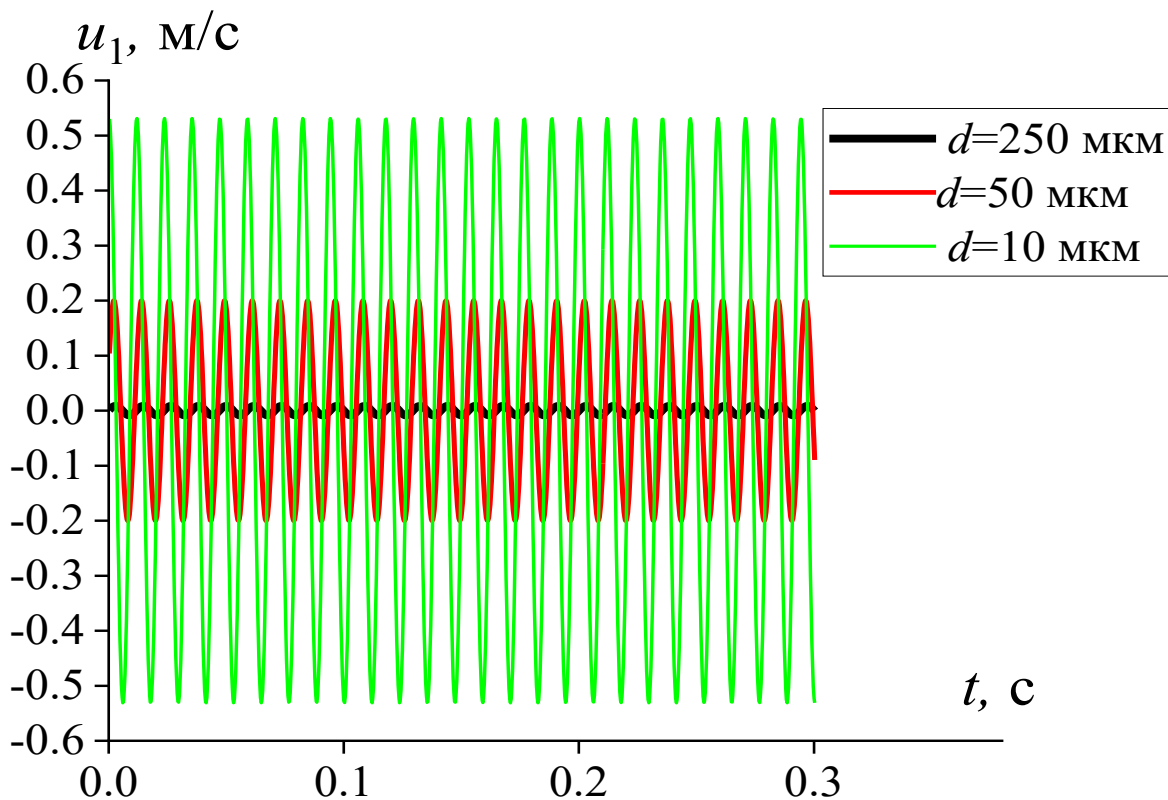


Рисунок 5а

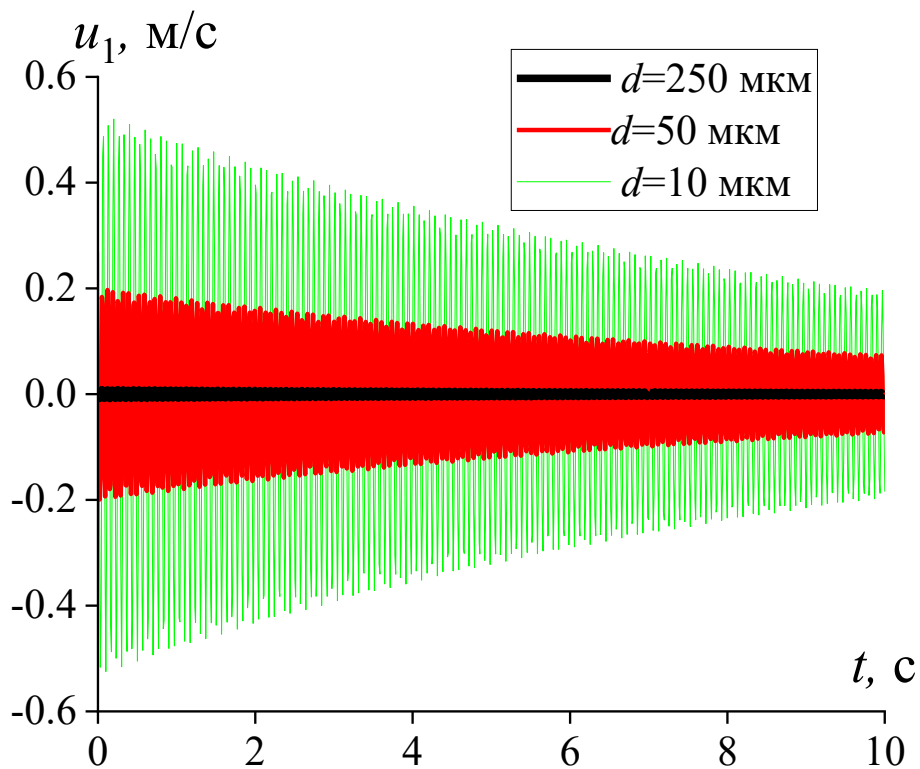


Рисунок 4б

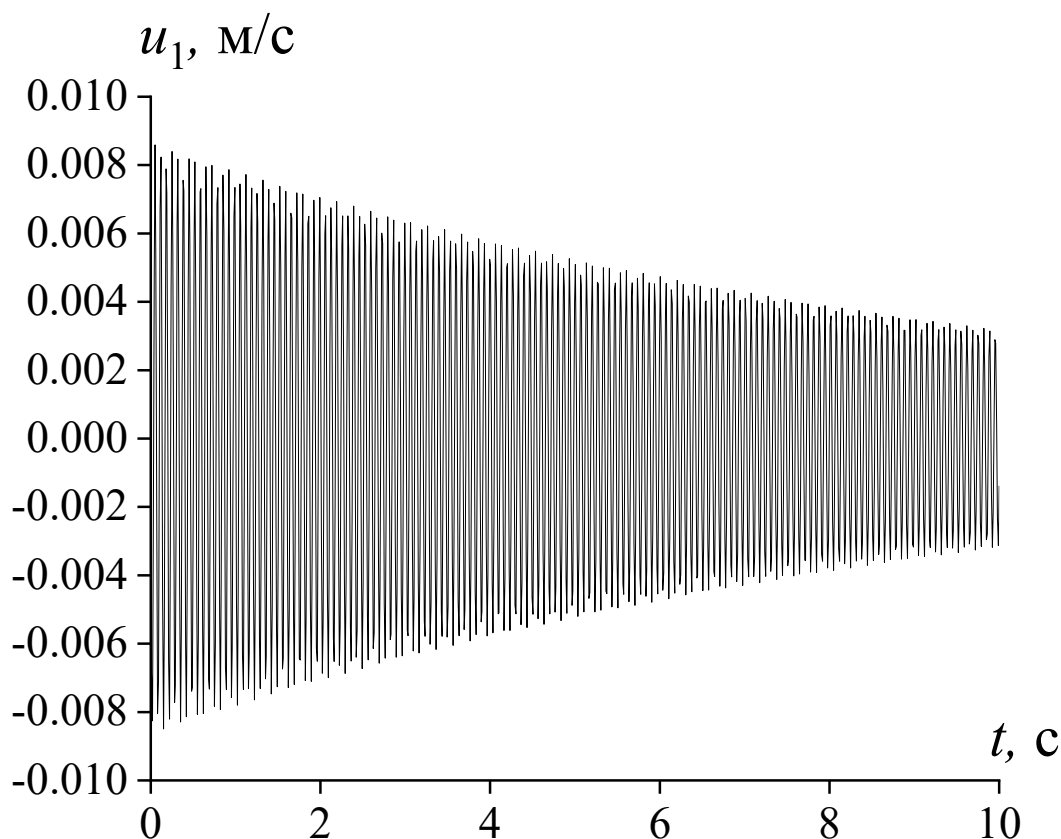


Рисунок 4в

Рисунок 4 - Временная зависимость скорости дисперсной частицы для различных размеров частиц: рис.4а – гармонические колебания; рисунок 4б – затухающие колебания; рис.4в – затухающие колебания для частицы с размером $d=250$ мкм.

В случае если гармонические (17*) и затухающие колебания (18*) дисперсного включения моделируются с учетом собственной функции (19) дифференциального оператора (12) также можно наблюдать, как при уменьшении размера дисперсного включения решение приближается к решению по формуле 5 (а,б) (17), (18). Такая закономерность объясняется тем, что при уменьшении размера дисперсного включения параметр α возрастает тем, самым функция $e^{-\alpha t}$ интенсивнее убывает для меньших размеров дисперсных включений.

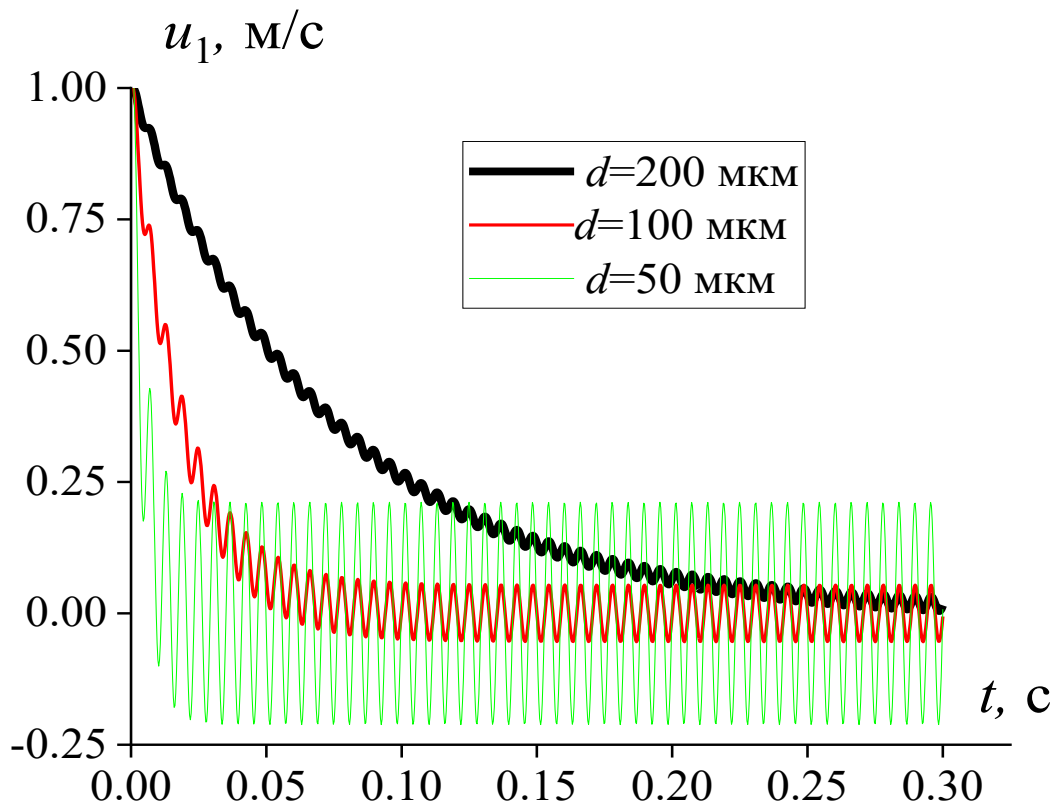


Рисунок 5а

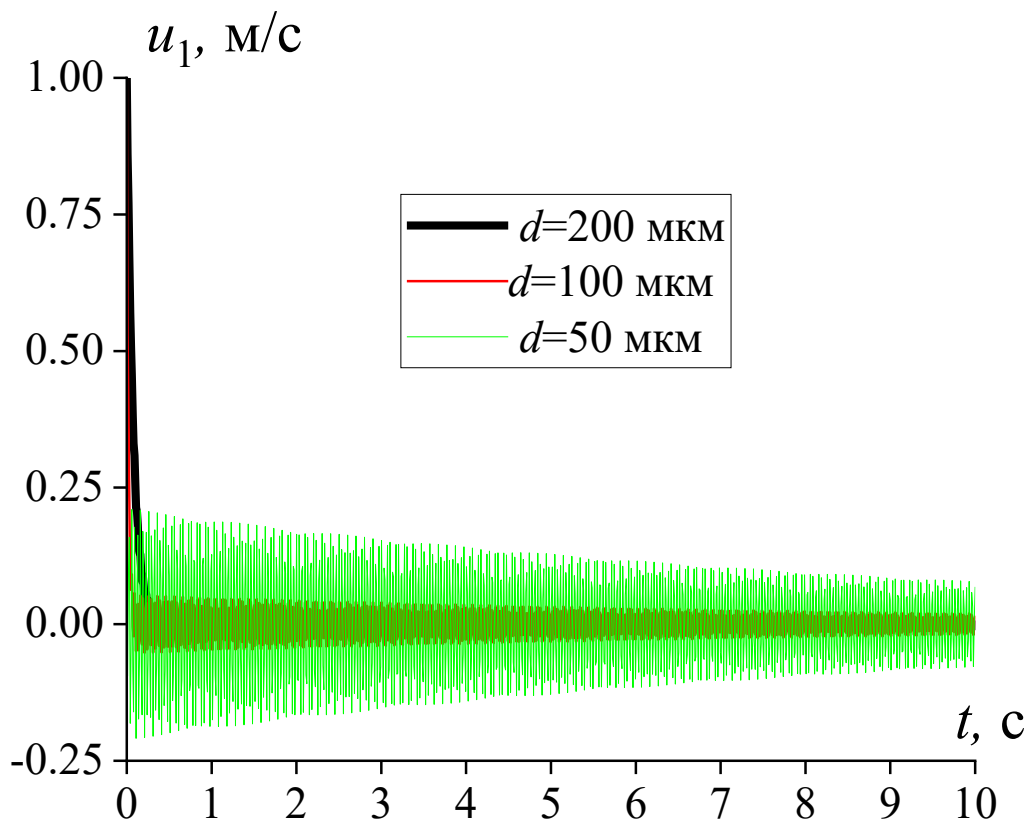


Рисунок 5б

Рисунок 5 – Временная зависимость скорости дисперсной частицы для различных размеров частиц: рис.5а – гармонические колебания; рис.5б – затухающие колебания.

Заключение. В работе представлена математическая модель динамики дисперсной частицы в поле скорости несущей среды (в расчетах несущая среда — это газ с физическими параметрами воздуха) в случае учета силы Стокса, что позволяет описать динамику дисперсного включения линейным дифференциальным уравнением. Рассмотрены гармонические и затухающие колебания несущей среды. Исследовано влияние размера дисперсного включения на интенсивность колебаний дисперсной частицы. Выявлено, что интенсивность колебаний дисперсного включения уменьшается при увеличении размера дисперсного включения. В случае построения общего решения дифференциального уравнения (11) при уменьшении размера дисперсного включения общее решение быстрее стремится к частному решению более. Результаты могут быть применены при математическом моделировании колебаний дисперсных частиц в акустических резонаторах.

Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

Список литературы:

1. Смагин Б.И., Липатов Б.И. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше первого с использованием пакета Maple // Наука и Образование. 2021. Т. 4. № 4.
2. Аникьев А.А., Аникьева Э.Н. Подходы к решению задач по квантовой механике 1. Стационарное уравнение Шредингера // Наука и Образование. 2023. Т. 6. № 3.
3. Скоморохова А.И., Рыбин Г.В., Данилин С.И. Анализ методов определения формы жидкостного кольца в жидкостнокольцевых вакуумных насосах // Наука и Образование. 2022. Т. 5. № 2.

4. Гарминович Н.А. О разделении переменных в уравнении в частных производных // Наука и Образование. 2024. Т. 7. № 1.

5. Губайдуллин Д. А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Казань: Изд-во Казанского математического общества. 1998. 153 с.

6. Тукмаков Д.А. Краткий обзор результатов теории кумуляции, основанной на методах комплексного анализа // Фундаментальные основы механики. 2024. № 14. С.81-89.

7. Тукмаков Д.А. Однопараметрические подгруппы аффинных преобразований для системы уравнений одномерной нестационарной динамики вязкой несжимаемой среды // Системы компьютерной математики. 2025. № 26. С. 286-293.

8. Тукмаков Д.А. Аналитическая модель нестационарной динамики дисперсной частицы в двухмерном стационарном течении несжимаемой жидкости // Энерго- и ресурсосбережение в теплоэнергетике и социальной сфере: материалы международной научно-технической конференции. 2024. Т. 12. № 1. С. 101-104.

9. Тукмаков Д.А. Сопоставление математических моделей гравитационного осаждения монодисперсного аэрозоля на основе одномерных нестационарных уравнений диффузии и дискретной модели // ПМЖ. 2024. № 4. С. 1-10.

10. Тукмаков Д.А. Численное моделирование массопереноса дисперсной фазы аэрозоля в нелинейных волновых полях для осесимметричной квазитрехмерной геометрической постановки // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Серия: Физико-математические и технические науки. 2019. № 1. С. 49-63.

11. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра. 2003. 284 с.

12. Тукмаков А.Л., Тонконог В.Г. Численное моделирование вскипающих потоков в каналах переменного сечения. Казань: Печать-Сервис. 2012. 114 с.

13. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Альмакаев И.М. Моделирование дрейфа мелкодисперсных частиц в акустическом резонаторе с помощью пакета CFD // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2017. Т. 19. № 9-10. С. 112-121.

14. Садовничий В.А. Теория операторов. Москва: Дрофа, 2001 384 с.

15. Имас О. Н., Пахомова Е. Г., Рожкова С. В., Устинова И. Г. Лекции по дифференциальным уравнениям. Томск: Изд-во Томского политехнического университета. 2012. 193 с.

16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. Санкт-Петербург: Мифрил, 1996. 416 с.

UDC 51-73

**ANALYTICAL MODEL OF OSCILLATIONS OF A DISPERSED
PARTICLE UNDER THE ACTION OF THE STOKES FORCE, BASED ON A
LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION**

Dmitry Al. Tukmakov

candidate of physical and mathematical sciences, research fellow

tukmakovda@imm.knc.ru

Federal Research Center, Kazan Scientific Center of the Russian Academy of

Sciences

Kazan, Russia

Abstract. This paper examines the velocity effect of a carrier medium flow on a dispersed particle as a differential operator of the particle's velocity function. The Stokes force is considered as the interphase interaction force, allowing the mathematical model to be reduced to an ordinary nonhomogeneous linear differential equation. Solutions to the particle dynamics equation are obtained to describe cases of harmonic and damped oscillations of the carrier medium. The effect of the

dispersed inclusion size on the amplitude of the dispersed particle's oscillation velocity is also examined.

Keywords: differential equations, fluid and gas mechanics, inhomogeneous media, interfacial interaction, Stokes force.

Статья поступила в редакцию 25.02.2026; одобрена после рецензирования 20.03.2026; принята к публикации 31.03.2026.

The article was submitted 25.02.2026; approved after reviewing 20.03.2026; accepted for publication 31.03.2026.