УДК 517.0 (075.8)

МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Борис Игнатьевич Смагин
доктор экономических наук, профессор
bismagin2023@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Двойной интеграл находит самое широкое применение в различных сферах научного исследования. В статье рассмотрены механические приложения двойного интеграла для определения: массы пластины, статические моменты пластины относительно координатных осей, координаты центра масс, моменты инерции пластины. В области механики именно двойной интеграл используется для определения важнейших характеристик.

Ключевые слова: двойной интеграл, границы интегрирования, полярные координаты, правильная область интегрирования, механические приложения.

Пусть тонкая пластина занимает область D на плоскости Oxy и имеет переменную плотность $\rho(x, y)$. Тогда справедливы следующие формулы [1-3]:

1. Масса пластины

$$M = \iint_D \rho(x, y) dxdy \qquad (1)$$

Если пластина однородная, то условимся считать её плотность $\rho(x, y) = 1$.

<u>Задача 1</u>. Найти массу круглой пластины радиуса R, если плотность пропорциональна квадрату расстояния точки от центра и равна δ на краю пластины.

<u>Решение</u>. Так как плотность пластины пропорциональна квадрату расстояния точки $M(x, y)$ от центра $O(0, 0)$, то её можно записать в виде

$$\rho(x, y) = k \cdot |OM|^2 = k\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = k \cdot \left(x^2 + y^2\right).$$

Учитывая, что плотность на краю пластины равна δ, находим коэффициент пропорциональности k:

$$\delta = k \cdot R^2 \to k = \frac{\delta}{R^2}.$$

Итак, плотность пластины имеет вид

$$\rho(x, y) = \frac{\delta}{R^2}\left(x^2 + y^2\right).$$

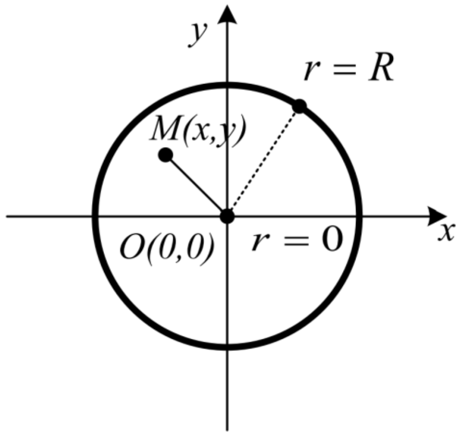
Тогда находим массу пластины по формуле (1), переходя к полярным координатам, получим

$$M = \iint_D \rho(x, y) dxdy = \iint_D \frac{\delta}{R^2}\left(x^2 + y^2\right) dxdy =$$

$$= \frac{\delta}{R^2} \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ dxdy = rdrd\varphi \end{bmatrix} = \frac{\delta}{R^2} \iint_D r^3 drd\varphi.$$

Для области D угол φ изменяется от 0 до 2π; радиус r изменяется от 0 до R, то есть

$$D=\left\{(r,\varphi)\middle|\, 0\le r\le R;\, 0\le\varphi\le 2\pi\right\}.$$



Расставляя пределы интегрирования, находим

$$M=\frac{\delta}{R^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^3dr=\frac{\delta}{R^2}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{\pi\delta R^2}{2}.$$

2. Статические моменты пластины относительно осей Ox и Oy [1-3]:

$$M_x=\iint_D y\cdot\rho(x,y)\,dxdy;\quad M_y=\iint_D x\cdot\rho(x,y)\,dxdy \qquad (2)$$

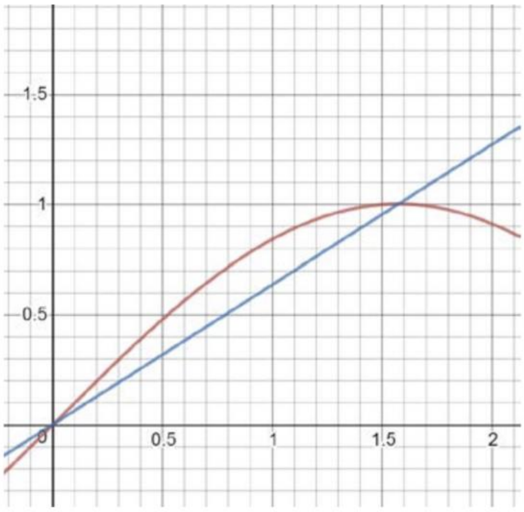
Задача 2. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной синусоидой y = sin x и прямой OA, проходящей через начало координат и вершину A(π/2, 1) синусоиды ($x \geq 0$).

Решение. Фигура однородная, следовательно, плотность ρ(x,y) = 1. Прямая OA проходит через начало координат, значит, её уравнение имеет вид y = kx. Учитывая координаты точки A(π/2, 1), находим коэффициент k:

$$1=k\cdot\frac{\pi}{2}\rightarrow k=\frac{2}{\pi}.$$

Тогда уравнение прямой OA имеет вид $y = 2x/\pi$. Область интегрирования D является правильной в направлении оси Oy. Тогда для неё x изменяется от 0 до π/2; y изменяется от прямой OA: $y = 2x/\pi$ до синусоиды y = sin x, то есть

$$D=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le x\le\frac{\pi}{2};\ \frac{2}{\pi}x\le y\le\sin x\right\}.$$



Тогда по формулам (2) получим

$$M_x=\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^{\pi/2}dx\int\limits_{2x/\pi}^{\sin x}ydy=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{2x/\pi}^{\sin x}dx=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{2}{\pi^2}x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 xdx-\frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2}x^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x}{2}dx-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{4}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{24};$$

$$M_y=\iint\limits_D x\cdot\rho(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_0^{\pi/2}xdx\int\limits_{2x/\pi}^{\sin x}dy=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}x\left(\sin x-\frac{2x}{\pi}\right)dx=\int\limits_0^{\pi/2}x\cdot\sin xdx-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}x^2dx.$$

Для вычисления $\int\limits_0^{\pi/2}x\cdot\sin xdx$ применим формулу интегрирования по частям. Пусть x = u, sinxdx = dv. Тогда du = dx, v = – cosx.

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \Rightarrow$$

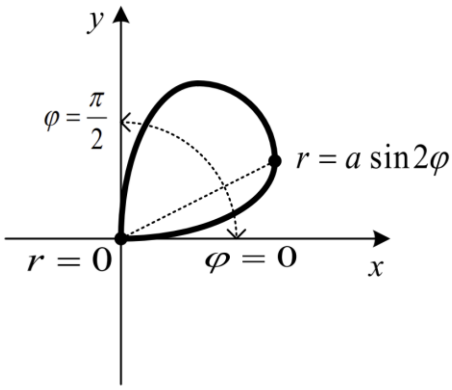
$$M_y = \left(-x\cos x + \sin x\right)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

3. Координаты центра масс x_0 и y_0 пластины [1-3]:

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\cdot\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy};\ \ y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\cdot\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy} \qquad (3)$$

Задача 3. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной одной петлёй кривой $r = a\sin 2\varphi$, лежащей в первой четверти.

Решение. Фигура однородная, следовательно, плотность $\rho(x, y) = 1$. По формуле (1) находим массу пластины, переходя к полярным координатам



$$M = \iint_D \rho(x,y)dxdy = \iint_D dxdy = \iint_D rdrd\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sin 2\varphi} rdr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{a^2\sin^2 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2\pi}{8}.$$

По формулам (2) находим статические моменты пластины относительно осей Ох и Оу:

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)\,dxdy = \iint_D ydxdy = \iint_D r^2 \sin\varphi drd\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int_0^{a\sin 2\varphi} r^2 dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cdot \frac{a^3 \sin^3 2\varphi}{3} d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} 8\sin^4\varphi \cos^3\varphi d\varphi = \frac{8}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^4\varphi \cos^2\varphi \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^4\varphi \left(1 - \sin^2\varphi\right) d\left(\sin\varphi\right) = -\frac{8}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\sin^4\varphi - \sin^6\varphi\right) d\left(\sin\varphi\right) =$$

$$= \frac{8}{3} a^3 \left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi - \frac{1}{7}\sin^7\varphi \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{8}{3} a^3 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{16}{105} a^3;$$

$$M_y = \iint_D x\rho(x,y)\,dxdy = \iint_D xdxdy = \iint_D r^2 \cos\varphi drd\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int_0^{a\sin 2\varphi} r^2 dr = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot \frac{a^3 \sin^3 2\varphi}{3} d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} 8\sin^3\varphi \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$\frac{8}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^4\varphi \sin\varphi d\varphi = -\frac{8}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi \left(1 - \cos^2\varphi\right) d\left(\cos\varphi\right) =$$

$$-\frac{8}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\cos^4\varphi - \cos^6\varphi\right) d\left(\cos\varphi\right) = -\frac{8}{3} a^3 \left(\frac{1}{5}\cos^5\varphi - \frac{1}{7}\cos^7\varphi \right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$-\frac{8}{3} a^3 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} \right) = \frac{16}{105} a^3.$$

Окончательно, по формулам (3) имеем

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{16a^3}{105} \cdot \frac{8}{a^2\pi} = \frac{128a}{105\pi}; \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{16a^3}{105} \cdot \frac{8}{a^2\pi} = \frac{128a}{105\pi}.$$

Итак, центр масс имеет координаты ($128a/105\pi$, $128a/105\pi$).

4. Моменты инерции пластины относительно осей Ox и Oy [1-3]:

$$I_x = \iint_D y^2 \cdot \rho(x,y)\,dxdy; \quad I_y = \iint_D x^2 \cdot \rho(x,y)\,dxdy \qquad (4)$$

Задача 4. Найти моменты инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$, относительно осей Ox и Oy.

Решение. Фигура однородная, следовательно, плотность $\rho(x, y) = 1$. Тогда по формулам (4) находим

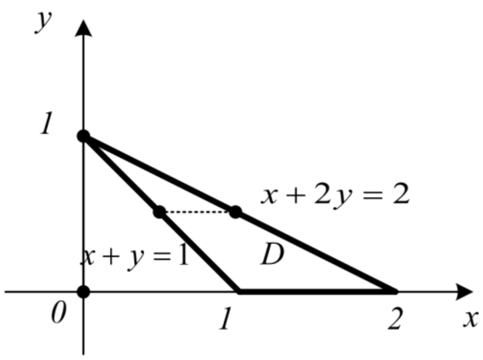
$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y)\, dxdy = \iint\limits_D y^2 dxdy;$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x, y)\, dxdy = \iint\limits_D x^2 dxdy.$$

Треугольник D является правильной областью в направлении оси Ox. Для него y изменяется от 0 до 1; x изменяется от прямой $x = 1 - y$ до прямой $x = 2 - 2y$, т.е.

$$D = \left\{ (x, y) \middle| \, 0 \le y \le 1; 1 - y \le x \le 2 - 2y \right\}.$$

Следовательно,



$$I_x = \int_0^1 y^2 dy \int_{1-y}^{2-2y} dx = \int_0^1 y^2 (2 - 2y - 1 + y) dy =$$

$$= \int_0^1 (y^2 - y^3) dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2 dy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{2-2y} x^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{(2-2y)^3}{3} - \frac{(1-y)^3}{3} \right) dy =$$

$$= \frac{7}{3} \int_0^1 (1-y)^3 dy = -\frac{7}{3} \cdot \frac{(1-y)^4}{4} \Bigg|_0^1 = \frac{7}{12}.$$

5. Момент инерции пластины относительно начала координат (полярный момент инерции) [1-3]:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho\left(x, y\right) dxdy \qquad (5)$$

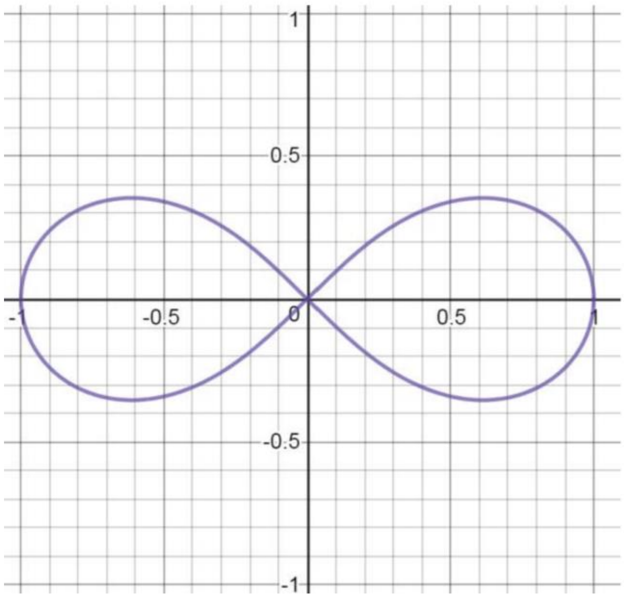
Задача 5. Найти момент инерции однородной фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, относительно полюса.

Решение. Находим промежуток изменения угла φ. Для этого решим неравенство: $\cos 2\varphi \geq 0$. Отсюда

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Первый лепесток получается при $n = 0 \Longrightarrow -\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$; второй при $n=1$ $\Longrightarrow -\pi/4 + \pi \leq \varphi \leq \pi/4 + \pi \Longrightarrow 3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$.

Будем проводить вычисления для одного лепестка, а результат удваивать. Тогда по формуле (5), переходя к полярным координатам, получим



$$I_O = 2\iint_D \left(x^2 + y^2\right) \rho\left(x, y\right) dxdy = 2\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = 2\iint_D r^3 dr d\varphi.$$

Для первого лепестка D угол φ изменяется от $-\pi/4$ до $\pi/4$; радиус r изменяется от 0 до лемнискаты $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, то есть

$$D = \left\{ \left(r, \varphi\right) \middle| -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4};\ 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\varphi} \right\}.$$

Имеем

$$I_O = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a^4 \cos^2 2\varphi}{4} d\varphi = \frac{a^4}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{2}\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^4}{8}.$$

Список литературы:

1. Богомолова Е.В. Кратные интегралы и их приложения: учебное пособие. Дубна: Гос. ун-т «Дубна». 2019. 97с.

2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Том 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. М.: МЦНМО. 2018. 256с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов: в 3-х томах. Том 3. СПб.: Лань. 2024. 656с.

UDC 517.0 (075.8)

MECHANICAL APPLICATIONS OF DOUBLE INTEGRALS

Boris Ig. Smagin

doctor of economics, professor

bismagin2023@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University

Michurinsk, Russia

Abstract. The double integral is widely used in various fields of scientific research. The article discusses the mechanical applications of the double integral for determining: plate masses, static plate moments relative to the coordinate axes, coordinates of the center of mass, moments of inertia of the plate. In the field of

mechanics, it is the double integral that is used to determine the most important characteristics.

Keywords: double integral, integration boundaries, polar coordinates, correct integration domain, mechanical applications.

Статья поступила в редакцию 10.05.2025; одобрена после рецензирования 20.06.2025; принята к публикации 30.06.2025.

The article was submitted 10.05.2025; approved after reviewing 20.06.2025; accepted for publication 30.06.2025.