

УДК 517.0 (075.8)

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Борис Игнатьевич Смагин

доктор экономических наук, профессор

bismagin2023@mail.ru

Мичуринский государственный аграрный университет

г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Двойной интеграл находит самое широкое применение в различных сферах научного исследования. Рассмотрены также вопросы вычисления двойного интеграла с переменными границами интегрирования с использованием алгоритмического языка Python и математических пакетов Maple и Mathematica.

Ключевые слова: двойной интеграл, переменные границы интегрирования, алгоритмический язык Python, пакет Mathematica, пакет Maple.

Двойные интегралы с переменными границами интегрирования имеют общую форму [2]:

$$\int_{y=a}^b \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Пример 1. Рассмотрим вычисление двойного интеграла для функции $z = f(x,y) = x + y^2$ с переменными границами интегрирования

$$V = \int_0^2 \int_0^{1-y/2} (x + y^2) dx dy$$

Вычисление внутреннего интеграла дает:

$$\int_0^{1-\frac{y}{2}} (x + y^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + y^2 x \right) \Big|_0^{1-\frac{y}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{y}{2} + \frac{9}{8} y^2 - \frac{y^3}{2}.$$

Вычисление внешнего интеграла дает:

$$V = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} + \frac{9}{8} y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{3}{8} y^3 - \frac{y^4}{8} \right) \Big|_0^2 = 1.$$

Рассмотрим использование библиотеки SymPy алгоритмического языка Python для вычисления вышеуказанного двойного интеграла [3]:

```
from sympy import *
x,y=symbols('x y')
z=x+y**2
x1,x2=0,1-y/2
y1,y2=0,2
V=integrate(z,(x,x1,x2),(y,y1,y2))
print("Двойной интеграл от z=",N(V,5))
Двойной интеграл от z= 1.0000
```

Использование пакета Mathematica [1]

Integrate[x+y^2,{y,0,2},{x,0,1-y/2}]

1

Использование пакета Maple [4]

> int(int(x + y^2, x=0 ..1 - y/2), y=0 ..2);

1

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 dx \int_0^x x^2 y dy$.

Вычисление внутреннего интеграла дает:

$$\int_0^x x^2 y dy = \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^4}{2}$$

Вычисление внешнего интеграла дает:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \frac{x^5}{10} \Big|_0^1 = 0,1.$$

Рассмотрим использование библиотеки SymPy алгоритмического языка Python для вычисления вышеуказанного двойного интеграла:

```
from sympy import*
```

```
x,y=symbols('x y')
```

```
z=(x**2*y)
```

```
V=integrate(z,(y,0,x),(x,0,1))
```

```
print("Двойной интеграл от функции z=", N(V,5))
```

Двойной интеграл от функции z= 0.10000

Использование пакета Mathematica

Integrate[x^2*y,{x,0,1},{y,0,x}]

1/10

Использование пакета Maple

$$> \text{int}(\text{int}(y \cdot x^2, y=0..x), x=0..1);$$

$$\frac{1}{10}$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2 + y^2}$.

Решение. Начинаем вычисление с внутреннего интеграла, в котором x является константой. Тогда, используя табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2 + y^2} &= \int_0^2 x \left(\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_x^{x\sqrt{3}} \right) dx = \int_0^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{x} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x} \right) dx = \\ &= \int_0^2 (\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1) dx = \int_0^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) dx = \int_0^2 \frac{\pi}{12} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Рассмотрим использование библиотеки SymPy алгоритмического языка Python для вычисления вышеуказанного двойного интеграла:

```
from sympy import*
x,y=symbols('x y')
z=(x/(x**2+y**2))
V=integrate(z,(y,x,sqrt(3)*x),(x,0,2))
print("Двойной интеграл от функции z=", N(V,5))
Двойной интеграл от функции z= 0.52360
```

Использование пакета Mathematica

```
Integrate[x/(x^2+y^2),{x,0,2},{y,x,Sqrt[3]*x}]
π/6
```

Использование пакета Maple

$$> \text{int} \left(\text{int} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, y=x..x \cdot \sqrt{3} \right), x=0..2 \right);$$

$$\frac{\pi}{6}$$

Проведенные исследования показали эффективное применение как алгоритмического языка Python, так и математических пакетов Mathematica и Maple при вычислении двойных интегралов с переменными границами интегрирования.

Список литературы:

1. Курбатов В.Г., Чернов В.Е. Пакет «Математика» в прикладных научных исследованиях: учебное пособие. Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2016. 241с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов: в 3-х томах. Том 3. СПб.: Лань. 2024. 656с.
3. Хилл К. Научное программирование на Python. М.: ДМК Пресс. 2021. 647с.
4. William P. Fox and William C. Bauldry Advanced Problem Solving Using Maple™ Applied Mathematics, Operations Research, Business Analytics, and Decision Analysis. CRC Press, 2020. 405p.

UDC 517.0 (075.8)

DOUBLE INTEGRALS WITH VARIABLE INTEGRATION BOUNDARIES

Boris I. Smagin

doctor of economics, professor

bismagin2023@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University

Michurinsk, Russia

Abstract. The double integral is widely used in various fields of scientific research. The issues of calculating a double integral with variable integration

boundaries using the Python algorithmic language and the Maple and Mathematica mathematical packages are also considered.

Keywords: double integral, variable integration boundaries, Python algorithmic language, Mathematica package, Maple package.

Статья поступила в редакцию 30.01.2025; одобрена после рецензирования 21.03.2025; принята к публикации 31.03.2025.

The article was submitted 30.01.2025; approved after reviewing 21.03.2025; accepted for publication 31.03.2025.