УДК 517.0 (075.8)

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С ПОСТОЯННЫМИ ГРАНИЦАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Борис Игнатьевич Смагин
доктор экономических наук, профессор
bismagin2023@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Двойной интеграл находит самое широкое применение в различных сферах научного исследования. В статье дано определение двойного интеграла и вычислительные аспекты элементарного случая: интеграла с постоянными границами. Рассмотрены также вопросы вычисления двойного интеграла с постоянными границами с использованием алгоритмического языка Python и математических пакетов Maple и Mathematica.

Ключевые слова: двойной интеграл, границы интегрирования, алгоритмический язык Python, пакет Mathematica, пакет Maple.

Вначале дадим определение двойного интеграла [2].

Пусть D – квадрируемая область на плоскости и пусть в области D определена ограниченная функция $z = f(x, y) = f(M)$. Разобьём область D на n квадрируемых частей D_i ($i = 1,2, \ldots, n$) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек. В каждой части D_i возьмём произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму

$$I\left(D_i, M_i\right)=\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \cdot \Delta s_i,$$

где Δs_i – площадь области D_i. Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области D на части D_i и данному выбору промежуточных точек M_i.

Пусть диаметр области D_i равен $d_i = \sup \rho\left(M', M''\right);\ M', M'' \in D_i$.

Обозначим диаметр области D через $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$.

<u>*Определение.*</u> Число I называется пределом интегральных сумм $I(Di, Mi)$ при $d \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения области D, у которого $d < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек Mi выполняется неравенство

$$\left|I\left(D_i, M_i\right)-I\right|<\varepsilon.$$

Если существует $\lim\limits_{d \to 0} I\left(D_i, M_i\right)=I,$ то он называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D и обозначается $I=\iint\limits_D f\left(x, y\right) dxdy=\iint\limits_D f\left(M\right) ds,$ а функция $f(x,y)$ называется интегрируемой в области D.

<u>*Теорема 1.*</u> Функция, непрерывная в замкнутой квадрируемой области, интегрируема в этой области.

<u>*Теорема 2.*</u> Функция, ограниченная в квадрируемой области и непрерывная всюду, кроме множества точек площади нуль (то есть это множество можно

заключить в многоугольник сколь угодно малой площади), интегрируема в этой области.

Отметим несколько свойств двойного интеграла.

1. Линейность

$$\iint_D \left(\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)\right)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy \pm$$
$$\pm \beta \iint_D g(x,y)dxdy,\ \ \alpha,\beta \in R$$

2. Аддитивность. Если $D = D_1 \cup D_2$, то

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

Наиболее простая ситуация возникает при вычислении двойного интеграла с постоянными границами интегрирования.

Двойной интеграл с постоянными границами для функции z = f(x,y) имеет общий вид:

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dxdy$$

Необходимо выполнить две интеграции последовательно.

Двойной интеграл вычисляется следующим образом:

Вычислите внутренний интеграл ∫xdx. Переменная y считается константой. Результат подставляется во внешний интеграл ∫ydy. Вычислите внешний интеграл ∫ydy.

Если границы интегрирования постоянны, то интеграция выполняется по прямоугольной области в направлениях x и Y. Это означает, что базовая поверхность тела представляет собой прямоугольник.

Рассмотрим вычисление интеграла

$$V = \int_0^1\int_0^2 \left(5 - x - y\right)dxdy$$

Вычисление внутреннего интеграла дает:

$$\int_0^2 (5-x-y)dx = \left(5x - \frac{x^2}{2} - yx\right)\Bigg|_0^2 = 8-2y$$

Результат вставляется во внешний интеграл:

$$V = \int_0^1 (8-2y)\,dy = \left(8y - y^2\right)\Big|_0^1 = 7.$$

При использовании алгоритмического языка Python с помощью SymPy вычисление двойного интеграла осуществляется довольно просто. Методу SymPy integrate(z, (x, x1, x2), (y, y1, y2)) передается только объект z, содержащий все данные функционального члена, и границы интегрирования.

Далее показано, как использовать SymPy для вычисления вышеуказанного двойного интеграла [3]:

```
from sympy import *
x,y=symbols('x y')
z=5-x-y
x1,x2=0,2
y1,y2=0,1
V=integrate(z,(x,x1,x2),(y,y1,y2))
print("Значение интеграла:",N(V,10))
Значение интеграла: 7.000000000
```

Использование пакета Mathematica [1]

```
Integrate[5-x-y,{x,0,2},{y,0,1}]
7
```

Математическая система Maple является лидером среди систем символьной математики, созданная фирмой Waterloo Maple Inc. (Канада). Она объединяет в себе ориентированный на сложные математические расчеты мощный язык программирования, редактор для подготовки и редактирования документов и программ, математически ориентированный входной язык общения и язык программирования, ядро алгоритмов и правил преобразования математических выражений, программные численный и символьный процессоры с системой диагностики, мощнейшие библиотеки встроенных и дополнительных функций, пакеты расширений и применений системы.

Мы неоднократно использовали эту систему в самых различных приложениях. Данная система также, может быть, с успехом применена для вычисления двойных интегралов. Расчеты были проведены нами с использованием системы Maple 2023.

Использование пакета Maple [4]:

```
> int(int(5 − x − y, x=0..2), y=0..1);
```

$$7$$

Рассмотрим теперь вычисление интеграла $\int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2}$.

<u>Решение.</u> Начинаем вычисление с внутреннего интеграла, в котором 2y является константой. Тогда

$$\int \frac{dx}{(x+2y)^2} = \int \frac{d(x+2y)}{(x+2y)^2} = \int (x+2y)^{-2} d(x+2y) = -(x+2y)^{-1} = -\frac{1}{x+2y}.$$

В результате, учитывая табличный интеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$, получим

$$\int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2} = \int_1^3 \left(-\frac{1}{x+2y}\Big|_2^5 \right) dy = \int_1^3 \left(-\frac{1}{5+2y} + \frac{1}{2+2y} \right) dy =$$

$$= -\int_1^3 \frac{dy}{5+2y} + \int_1^3 \frac{dy}{2+2y} = -\left(\frac{1}{2}\ln|5+2y| \right)\Big|_1^3 + \left(\frac{1}{2}\ln|2+2y| \right)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}.$$

Определим в виде десятичной дроби полученный результат:

```
z=(1/2)*math.log(14/11)
z
0.12058102840844402
```

Вычислим данный интеграл, используя SymPy алгоритмического языка Python

```
from sympy import *
x,y=symbols('x y')
z=1/(x+2*y)**2
x1,x2=2,5
y1,y2=1,3
I=integrate(z,(x,x1,x2),(y,y1,y2))
print('Значение двойного интеграла равно:', N(I,10))
```

Значение двойного интеграла равно: 0.1205810284

Использование пакета Mathematica

```
Integrate[1/(x+2*y)^2,{x,2,5},{y,1,3}]
```

1/2 Log[14/11]

Использование пакета Maple

$$> int\left(int\left(\frac{1}{(x+2\cdot y)^2}, x=2..5\right), y=1..3\right);$$

$$\frac{\ln(7)}{2}+\frac{\ln(2)}{2}-\frac{\ln(11)}{2}$$

Проведенные исследования показали эффективное применение как алгоритмического языка Python, так и математических пакетов Mathematica и Maple при вычислении двойных интегралов с постоянными границами интегрирования.

Список литературы:

1. Курбатов В.Г., Чернов В.Е. Пакет «Математика» в прикладных научных исследованиях: учебное пособие. Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2016. 241с.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов: в 3-х томах. Том 3. СПб.: Лань. 2024. 656с.

3. Хилл К. Научное программирование на Python. М.: ДМК Пресс. 2021. 647с.

4. William P. Fox and William C. Bauldry Advanced Problem Solving Using MapleTM Applied Mathematics, Operations Research, Business Analytics, and Decision Analysis. CRC Precc, 2020. 405p.

UDC 517.0 (075.8)

DOUBLE INTEGRALS WITH CONSTANT INTEGRATION BOUNDARIES

Boris I. Smagin
doctor of economics, professor
bismagin2023@mail.ru
Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Abstract. The double integral is widely used in various fields of scientific research. The article defines the double integral and computational aspects of the elementary case.: an integral with constant boundaries. The issues of calculating a double integral with constant boundaries using the Python algorithmic language and the Maple and Mathematica mathematical packages are also considered.

Keywords: double integral, integration boundaries, Python algorithmic language, Mathematica package, Maple package.

Статья поступила в редакцию 30.01.2025; одобрена после рецензирования 21.03.2025; принята к публикации 31.03.2025.

The article was submitted 30.01.2025; approved after reviewing 21.03.2025; accepted for publication 31.03.2025.