УДК 631:517.518.82

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ ЧЕБЫШЕВА

Анатолий Анатольевич Аникьев[1]
доктор физико-математических наук, профессор
aaanikyev@mail.ru
Эмилия Николаевна Аникьева[2]
старший преподаватель
korol_0909@mail.ru
[1]Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана
г. Москва, Россия
[2]Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Представлена процедура приближения функциональной зависимости, заданной в табличном виде полиномами Чебышева, ортогональными на интервале определения табличных значений. На примере аппроксимации логистической кривой показана возможность восстановления аналитической функции, максимально приближенной к эмпирической зависимости на изучаемом дискретном интервале заданных переменных.

Ключевые слова: аппроксимация, полином Чебышева, коэффициенты Фурье, погрешность, точность.

Приближение некоторой функциональной зависимости на интервале можно проводить различными способами, в зависимости от требуемой точности. Хорошо известным и часто применяемым методом является метод наименьших квадратов (МНК). В основе метода лежит приближение экспериментальных данных заданных в виде таблицы в общем случае полиномом степен n. Коэффициенты полинома находятся из решения системы n + 1 линейных уравнений, построенных из условия, чтобы квадрат разности между табличными данными и искомым полиномом оказался минимальным, что графически соответствует наименьшему уклонению кривой полинома от экспериментальных точек. Однако, если мы хотим получить приближение некоторой зависимости с гораздо большей точностью необходимо пользоваться так называемыми обобщенными полиномами, построение которых основано на множестве ортогональных функций на интервале. Предположим, нам задана некоторая эмпирическая зависимость в виде таблицы данных, в которой предикторы пробегают ряд m дискретных значений. Им соответствует ряд зависящих переменных и наша задача построить приближение к заданной зависимости $f(x)$ или построить поточечное приближение. Предположим, что на рассматриваемом интервале $[a, b]$ определено множество функций $g(x)$, тогда обобщенным многочленом приближения к заданной зависимости будем считать многчлен вида:

$$Q_n(x) = C_0 \cdot g_0(x) + C_1 \cdot g_1(x) + C_2 \cdot g_2(x) + \ldots + C_n \cdot g_n(x) = \sum_{j=0}^{n} C_j \cdot g_j(x) \qquad (1)$$

Наилучшим среднеквадратичным приближением к экспериментальной зависимости будем считать такой многочлен (1), для которого минимальным будем средне квадратичная норма вида:

$$L_2(f, Q) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[f(x_i) - Q_n(x_i) \right]^2 \right\}^{1/2} \to \min \qquad (2)$$

Здесь индекс i нумерует значения переменных заданных в таблице в количестве m.

Коэффициенты обобщенного полинома (1) можно вычислить, для ортогональных на интервале $[a, b]$ функций g(x) по соотношению [1]:

$$C_j = \frac{(f, g_j)}{\|g_j\|^2} = \frac{\int_a^b f(x) \cdot g_j(x) dx}{\int_a^b g_j^2(x) dx}\ , \tag{3}$$

а для поточечного приближения по соотношению:

$$C_j = \frac{(f, g_j)}{\|g_j\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot g_j(x_i)}{\sum_{i=1}^{m} g_j^2(x_i)} \tag{4}$$

В соотношениях (3), (4) в числителе скалярное произведение заданной функции и множества функций на интервале (3) или в таблице (4), а в знаменателе – норма функций многочлена (1). Напомним, что ортогональной называется системафункций свертка которых (скалярное произведение) с различными индексами равно нулю. Погрешность приближения по средне квадратичной норме вычисляется по соотношению [2]:

$$\Delta f(n) = \left\{ \| f \|^2 - \sum_{j=0}^{n} C_j^2 \cdot \|g_j\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

а точность определяется как погрешность приближения отнесенная к норме заданной функции:

$$\delta f(n) = \frac{\Delta f(n)}{\| f \|} \tag{6}$$

Очевидно, погрешность и точность зависят от количества членов ряда (1). Норма функции вычисляется по средне квадратичному закону [3]:

$$\| f \| = \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

или для поточечного представления зависимости:

$$\|f\| = \left\{ \sum_{i=1}^{m} f^2(x_i) \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

В качестве примера множества функций попарно ортогональных на интервале можно привести ряд тригонометрических функций с обобщенным многочленом в виде ряда Фурье, полиномы Лежандра, ортогональные на интервале $[-1, 1]$, полиномы Чебышева, ортогональные на множестве точек $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots m$. Нашей задачей будет получить поточечное приближение некоторой зависимости полиномами Чебышева и оценить погрешность данного приближения. Полиномы Чебышева определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x - a, \\ &T_n(x) = (x - a_n) \cdot T_{n-1}(x) - b_n \cdot T_{n-2}(x) \end{aligned} \qquad (8)$$

В рекуррентных соотношениях (8) коэффициенты вычисляются из условия ортогональности полиномов на множестве определенных точек и задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} &a = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i, \\ &a_n = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot T_{n-1}^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{m} T_{n-1}^2(x_i)}, \\ &b_n = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot T_{n-2}(x_i) \cdot T_{n-1}(x_i)}{\sum_{i=1}^{m} T_{n-2}^2(x_i)} \end{aligned} \qquad (9)$$

Приближение функциональной зависимости, заданной в виде таблицы с помощью полиномов Чебышева (8), (9) выполняется по следующему алгоритму. Прежде всего зная первые два полинома (8) необходимо вычислить полином $T_2(x)$. Для этого предварительно вычисляются коэффициенты Фурье a_2 и b_2 по соотношению (9). Такая процедура повторяется до момента получения полинома $T_n(x)$ при $n=m-1$. Полином порядка $n=m$ не может быть вычислен, поскольку его норма равна нулю и мы уже не имеем полиномы Чебышева. После того как получены все необходимые полиномы, вычисляем коэффициенты Фурье для уже найденых соответствующих полиномов по соотношению (4) и строим обобщенный многочлен по соотношению (1). Погрешность приближения и его точность после построения графика вычисляем по соотношениям (5) и (6).

Рассмотрим в качестве примера приближение функциональной зависимости, заданной в таблице 1.

Таблица 1

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.333	1.24	2.76	3.667	3.928

Таблица 2

Результаты расчета коэффициентов a_n b_n, вида полиномов, коэффициентов Фурье и погрешности приближения.

n	a_n	b_n	$T_n(x)$	C_n	$\Delta f(n)$
0	3	-	1	2.386	
1	3	-	$x-3$	0.962	
2	3	2	$(x-3)^2-2$	-0.136	0.405
3	3	1.4	$x^3-9.0\cdot x^2+23.6\cdot x-16.8$	-0.105	0.00487
4	3	1.029	$x^4-11.99x^3+49.57x^2$ $-81.428x+43.2$	0.05	0

Мы получили три приближения обобщенными многочленами:

$$Q_2(x)=\sum_{n=0}^{2}C_nT_n(x)$$

$$Q_3(x)=\sum_{n=0}^{3}C_nT_n(x) \qquad (10)$$

$$Q_4(x)=\sum_{n=0}^{4}C_nT_n(x)$$

учитывающими соответственно три, четыре и пять членов многочлена (1).

На рисунке 1. показаны результаты расчета приближений по соотношениям (10) к экспериментальным данным из таблицы 1.

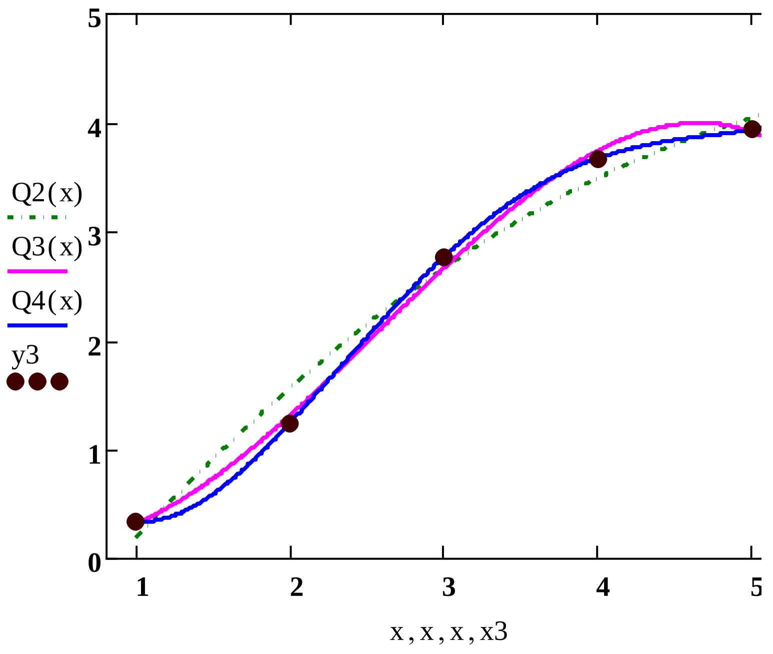

Рисунок 1 - Результаты приближения полиномами Чебышева поточечных данных из таблицы 1. Штрих – пунктирная линия – приближение полиномом $Q_2(x)$, сплошная фиолетовая линия – приближение полиномом $Q_3(x)$ и сплошная синяя линия – полиномом $Q_4(x)$, сплошные кружки – табличные данные.

Погрешность, вычисленная по соотношению (5) приведена в последнем столбце таблицы 2, и показывает резкое падение её значений по мере возрастания слагаемых в обобщенном многочлене.

Заключение.

Таким образом, использование полиномов Чебышева для приближения экспериментальных данных на интервале определения заданной переменной существенно повышает точность восстановления функциональной заависимости. Нами был выбран пример логистической зависимости, очень часто используемой для описания сроков нарастания растительной массы культурных посевов в растениеводстве, плодовых деревьев при анализе условий выращивания плодовых садов и практически во всех разделах биологии, где анализируется изменение численности популяций[4].

Все расчеты и графическое оформление выполнены в математическом пакете MathCad v. 15.

Список литературы:

1. Богачев К. Ю. Практикум на ЭВМ. Методы приближения функций. 3-е изд., перераб. и доп. Москва: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ. 2002.

2. Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М.: Высш. шк. 2000. 267 с.

3. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1980. 534 с.

4. Дроздюк А.В. Логистическая кривая // Торонто. Choven. 20. 271 с.

UDC 631:517.518.82

APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY CHEBYSHEV POLYNOMIALS

Anatoly An. Anikyev[1]
doctor of physical and mathematical sciences, professor
aaanikyev@mail.ru
Emiliya N. Anikyeva[2]
senior lecturer
korol_0909@mail.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University
Moscow, Russia
[2]Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Abstract. The procedure for approximating a functional dependence specified in a tabular form by Chebyshev polynomials orthogonal on the interval of determining the tabular values is presented. The possibility of restoring an analytical function that is maximally close to the empirical dependence on the studied discrete interval of given variables is shown employing the example of approximating a logistic curve.

Key words: approximation, Chebyshev polynomial, Fourier coefficients, error, accuracy.

Статья поступила в редакцию 11.11.2024; одобрена после рецензирования 20.12.2024; принята к публикации 25.12.2024.

The article was submitted 11.11.2024; approved after reviewing 20.12.2024; accepted for publication 25.12.2024.