УДК 378.147

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В SMATH STUDIO

Наталья Евгеньевна Макова
кандидат сельскохозяйственных наук, доцент
nemakova@mail.ru
Наталья Викторовна Картечина
кандидат сельскохозяйственных наук, доцент
kartechnatali@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. В статье рассматриваются возможности применения отечественного бесплатно распространяемого математического пакета SMath Studio при подготовке будущих инженеров, осваивающих решение задач вычислительной математики. Проведен анализ возможностей и приемов решения систем линейных алгебраических уравнений и систем нелинейных уравнений средствами SMath Studio.

Ключевые слова: цифровые компетенции, цифровые технологии, пакеты математических программ, SMath Studio, решение систем уравнений, системы линейных алгебраических уравнений, системы нелинейных уравнений.

Инновационные решения в сельском хозяйстве, связанные с проектированием, разработкой и внедрением цифровых систем, оборудования и технологий, предъявляют новые требования к компетенциям будущих агроинженеров, деятельность которых направлена на автоматизацию рабочих процессов и повышение эффективности сельскохозяйственного производства с использованием современных научных исследований, методов и технологий [1]. Значимость цифровых компетенций отражена в Федеральных государственных образовательных стандартах высшего образования [2].

Студенты инженерных специальностей в ходе обучения сталкиваются с решением задач теоретического и прикладного характера, при которых необходимо применять математические знания [3].

В Мичуринском аграрном университете будущие специалисты получают навыки работы с математическими пакетами в рамках дисциплины «Информационные технологии» [4]. Для освоения методов и приемов решения инженерных задач успешно применяется математический редактор отечественного производства SMath Studio [5].

Множество, если не сказать большинство, задач вычислительной математики сводится к решению **систем линейных алгебраических уравнений** (СЛАУ), т. е. систем уравнений вида:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n = b_i,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$

В матричной форме СЛАУ записывается в виде:

$$A\times x = B$$

где A – матрица коэффициентов СЛАУ размерности n x n,

x — вектор неизвестных,

B – вектор правых частей уравнений.

СЛАУ имеет единственное решение, если матрица коэффициентов A является невырожденной, то есть если ее определитель не равен нулю.

В SMath Studio системы уравнений можно решить несколькими способами:

- методом Крамера;

- с помощью обратной матрицы;

- с помощью встроенной функции roots () [6].

Например, нужно решить систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+5\cdot x_2+2\cdot x_3 = 1 \\ 0{,}7\cdot x_1+12\cdot x_2+5\cdot x_3 = 2{,}9 \\ 3\cdot x_1+0\cdot x_2+4\cdot x_3 = 3{,}1 \end{cases}$$

Система состоит из трех уравнений с тремя неизвестными. Задаем матрицу коэффициентов A и вектор правой части B. Проиллюстрируем решение системы перечисленными тремя методами.

Метод Крамера

Вычисляем определитель матрицы A, обозначив его через Δ. Символ Δ можно ввести с боковой панели «Символы». Если Δ≠0, то система имеет единственное решение.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0.7 & 12 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 \\ 2.9 \\ 3.1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta := |A| \qquad \Delta = 37$$

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2.9 & 12 & 5 \\ 3.1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Delta 1 := |A1| \qquad \Delta 1 = -6.9 \qquad x1 := \frac{\Delta 1}{\Delta} \qquad x1 = -0.1865$$

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0.7 & 2.9 & 5 \\ 3 & 3.1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Delta 2 := |A2| \qquad \Delta 2 = -4.76 \qquad x2 := \frac{\Delta 2}{\Delta} \qquad x2 = -0.1286$$

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0.7 & 12 & 2.9 \\ 3 & 0 & 3.1 \end{bmatrix} \qquad \Delta 3 := |A3| \qquad \Delta 3 = 33.85 \qquad x3 := \frac{\Delta 3}{\Delta} \qquad x3 = 0.9149$$

Рисунок 1 – Решение СЛАУ методом Крамера в SMath Studio

Сформируем три матрицы A1, A2, A3, полученные из матрицы A заменой 1, 2, 3-го столбца на столбец свободных членов, т.е. правых частей уравнений системы. Вычисляем определители этих матриц: Δ1, Δ2, Δ3.

Находим решение системы по формулам:

$$x1 := \frac{\Delta 1}{\Delta}, x2 := \frac{\Delta 2}{\Delta}, x3 := \frac{\Delta 3}{\Delta}$$

$$x1 = -0.1865 \quad x2 = -0.1286 \quad x3 = 0.9149$$

Метод Крамера используется для проведения аналитических преобразований систем малой размерности.

Метод обратной матрицы

Самым простым методом решения СЛАУ по форме записи и реализации в SMath Studio является метод обратной матрицы. Обозначим за X искомый вектор результатов (x_1, x_2, x_3). Тогда СЛАУ в матричном виде выглядит как A·X=B. Записываем формулу вычисления корней через обратную матрицу $X=A^{-1}\cdot B$ и выводим результат. Результат совпадает с полученным предыдущим способом.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0.7 & 12 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 \\ 2.9 \\ 3.1 \end{bmatrix}$$

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{bmatrix} -0.1865 \\ -0.1286 \\ 0.9149 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2 – Решение СЛАУ методом обратной матрицы в SMath Studio

Решение систем уравнений с помощью функции roots( )

Функция *roots()* находит одно численное решение системы в форме вектора.

Каждое уравнение системы необходимо привести к виду f(x)=0, т.е. перенести содержимое правой части в левую. Решение системы найдем в виде вектора X (x_1, x_2, x_3).

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+5\cdot x_2+2\cdot x_3 - 1 = 0 \\ 0,7\cdot x_1 +12\cdot x_2+5\cdot x_3 - 2,9 = 0 \\ 3\cdot x_1 +0\cdot x_2+4\cdot x_3 - 3,1 = 0 \end{cases}$$

Функцию *roots(2)* можно вызвать одним из следующих способов:

1. Выбрать команду главного меню «Вставка – Функция…»;

2. С помощью кнопки «Функция»  панели инструментов;

3. Нажать комбинацию клавиш Ctrl+E для вызова диалогового окна «Вставка – Функция»;

4. Ввести имя функции с клавиатуры, при этом появится всплывающее окно с перечнем доступных функций, подпадающих под вводимое название. [3]

В первом поле функции *roots(2)* нужно ввести вектор-столбец из левых частей уравнений системы, во втором поле – вектор-столбец неизвестных переменных. Функция *roots()* возвращает вектор, составленный из корней системы. Результат – вектор X – совпадает с ответами, полученными предыдущими способами.

$$X := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} 1 \cdot x1 + 5 \cdot x2 + 2 \cdot x3 - 1 \\ 0.7 \cdot x1 + 12 \cdot x2 + 5 \cdot x3 - 2.9 \\ 3 \cdot x1 + 0 \cdot x2 + 4 \cdot x3 - 3.1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}\right)$$

$$X = \begin{bmatrix} -0.1865 \\ -0.1286 \\ 0.9149 \end{bmatrix}$$

Рисунок 3 – Решение СЛАУ с помощью функции roots() в SMath Studio

Вообще говоря, функция *roots()* применяется для нахождения корней **систем нелинейных уравнений.** Нелинейные системы представляют интерес для инженеров, поскольку большинство систем по своей природе нелинейны. [7, 8, 9]

Функция *roots()* может включать либо два, либо три аргумента (рассмотренный выше пример СЛАУ – частный случай):

- *roots (вектор1, вектор2)*
- *roots (вектор1, вектор2, вектор3)*

вектор1 – вектор-столбец из левых частей уравнений системы;

вектор2 – вектор-столбец неизвестных переменных;

вектор3 – начальное условие (приближенные значения неизвестных переменных, определяемые, например, по графику). [10]

Если система имеет несколько решений, то функция *roots()* ищет решение, ближайшее к *вектор3*. Если решения системы сильно отличаются от *вектор3*, то функция *roots()* может решение не найти и вывести сообщение «Действительных корней нет».

Например, рассмотрим решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Выполним проверку графически и аналитически.

Сначала преобразуем уравнения системы к виду *f(x)*=0:

$$\begin{cases} x^4 + y^2 - 3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Решение системы найдем в виде вектора *T* с помощью функции *roots(2)*. В первом поле аргументов функции нужно ввести вектор-столбец из левых частей уравнений системы, во втором поле – вектор-столбец неизвестных переменных x и y. Получим искомые значения переменных в виде вектора Т.

Теперь решим графически эту систему. Для этого из каждого уравнения системы нужно выразить в явном виде *y* через *x*. Из первого уравнения получим $y = \pm\sqrt{3 - x^4}$, т.е. $y1 = \sqrt{3 - x^4}$ и $y2 = -\sqrt{3 - x^4}$, из второго уравнения $y3 = -x/2$.

Построим графики функций в одной системе координат. Из чертежа видно, что система имеет два решения (две точки пересечения окружности с прямой линией). Координаты точек пересечения и являются решениями системы.

Мы же, используя функцию *roots(2)*, получили только одно решение – (-1.2695; 0.6347).

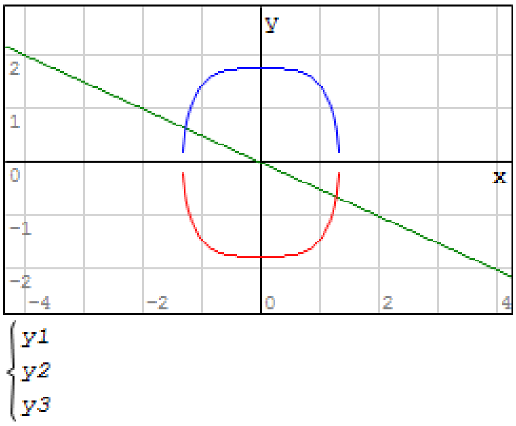
Второе решение системы найдём в виде вектора *Z(x,y)*. Чтобы найти второе решение, используем функцию *roots(3)*. В третьем поле вводим начальное условие – это приближенные значения неизвестных x и y, которые определяем по графику. Например, 1 и 1. Получим второй корень – (1.2695; -0.6347).

Итак, мы получили два решения системы – *T* и *Z*. Проверим эти решения аналитически, т.е. подставляя в исходные уравнения системы (обозначим их *f и g*). Проверка показала, что найденные решения верные: *f*=3, *g*≈0.

$$T := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} x^4 + y^2 - 3 \\ x + 2\cdot y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \qquad Z := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} x^4 + y^2 - 3 \\ x + 2\cdot y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$T = \begin{bmatrix} -1.2695 \\ 0.6347 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 1.2695 \\ -0.6347 \end{bmatrix}$$

$$y1 := \sqrt{3 - x^4} \qquad y2 := -\sqrt{3 - x^4} \qquad y3 := -\frac{x}{2}$$

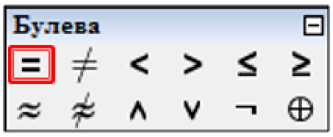


Проверка

$$f(x; y) := x^4 + y^2$$
$$g(x; y) := x + 2\cdot y$$
$$f\left(T_1; T_2\right) = 3$$
$$g\left(T_1; T_2\right) = \frac{3}{1515824502954880}$$
$$f\left(Z_1; Z_2\right) = 3$$
$$g\left(Z_1; Z_2\right) = \frac{-3}{1515824502954880}$$

Рисунок 4 – Решение системы нелинейных уравнений в SMath Studio

Еще одна возможная форма записи функции *roots()*: в первом поле вместо вектора-столбца из левых частей уравнений системы, можно вводить непосредственно сами исходные уравнения. Только вместо обычного знака «равно» используется «Булево равно», которое можно вставить с одноименной панели. При этом решения получаются те же самые, что и в предыдущем примере.



$$T := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} x^4 + y^2 = 3 \\ x + 2\cdot y = 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \qquad Z := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} x^4 + y^2 = 3 \\ x + 2\cdot y = 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$T = \begin{bmatrix} -1.2695 \\ 0.6347 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 1.2695 \\ -0.6347 \end{bmatrix}$$

Рисунок 5 – Использование булева равно при записи функции roots

Проведенный анализ показал, что возможности математического пакета SMath Studio для решения систем уравнений достаточно обширны: можно решать системы различных типов и использовать различные методы решения. Учет рассмотренных особенностей и приемов решения систем уравнений на том или ином этапе решения инженерных задач студентами будет способствовать повышению качества образовательных результатов. [11]

Список литературы:

1. Макова Н.Е. Формирование цифровых компетенций агроинженеров // Новые технологии в аграрном образовании: Сборник материалов V Всероссийской (национальной) научно-методической конференции с международным участием (г. Мичуринск, 7 февраля 2024 г.) / под ред. С.В. Соловьева – Мичуринск: Изд-во Мичуринского ГАУ. 2024. 265 с.

2. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования. Направление подготовки 35.03.06 Агроинженерия - URL : https://www.mgau.ru/sveden/eduStandarts/files/35.03.06 _19 .pdf.

3. Макова Н.Е. Решение уравнений средствами SMath Studio // Наука и образование: научный рецензируемый электронный журнал. 2024. Т.7. № 1.

4. Рабочая программа дисциплины «Информационные технологии» по основной образовательной программе бакалавриата 35.03.06 Агроинженерия: - URL: https://www.mgau.ru/sveden/education/files/2024/rpud/rpud35.03.06ts_19/Информационные%20технологии.pdf

5. Изменчивость VUCA-мира как аспект преподавания IT-технологий / Н.Е. Макова, Н.В. Картечина, Л.И. Никонорова, Н.В. Пчелинцева // Наука и образование. 2023. Т.6. № 1.

6. Официальный сайт SMath Studio – URL: https://ru.smath.com/

7. Макова Н.Е., Картечина Н.В., Ильченко М.А. О циклах зрелости современных информационных технологий // Наука и образование. 2023. Т.6. № 1.

8. Макова Н.Е., Макова А.А., Криволапов И.П. Разработка способа доочистки и обеззараживания нефтезагрязненных сточных вод // Агротехнологии XXI века: Материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, посвященной 100-летию высшего аграрного образования на Урале. Издательство: ИПЦ Прокростъ (Пермь). 2019. 375 с, с. 341-347.

9. Макова Н.Е., Аникьева Э.Н., Макова А.А., Аникьев А.А. Автоматизированная система оценки урожайности сортов плодовых и ягодных культур по их морфометрическим индексам// Робототехника в сельскохозяйственных технологиях: матер. Межд. научно-практ. конф. 10-12 ноября 2014 г. / Мичуринск: Изд-во МичГАУ. 2014 г. 327 с, с. 52-57.

10. Математика в SmathStudio: учебное пособие / Н.М. Удинцова, М.Н. Середина, В.В. Серёгина, Д.В. Степовой. / Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ. 2022. 191 с.

11. Макова Н.Е., Соловьев С.В. Вклад Мичуринского аграрного университета в систему подготовки кадров для региона // Наука и образование. 2023. Т.6. № 1.

UDC 378.147

SOLVING SYSTEMS OF EQUATIONS IN SMATH STUDIO

Natalia Ev. Makova
candidate of agricultural sciences, associate professor
nemakova@mail.ru
Natalia V. Kartechina
candidate of agricultural sciences, associate professor
kartechnatali@mail.ru
Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Annotation. The article discusses the possibilities of using the domestic free-of-charge mathematical package SMath Studio in the training of future engineers mastering the solution of computational mathematics problems. The analysis of the possibilities and methods of solving systems of linear algebraic equations and systems of nonlinear equations by means of SMath Studio is carried out.

Keywords: digital competencies, digital technologies, mathematical software packages, SMath Studio, solving systems of equations, systems of linear algebraic equations, systems of nonlinear equations.

Статья поступила в редакцию 03.05.2024; одобрена после рецензирования 13.06.2024; принята к публикации 27.06.2024.

The article was submitted 03.05.2024; approved after reviewing 13.06.2024; accepted for publication 27.06.2024.