УДК 519.6

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОВЫШЕНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Анатолий Анатольевич Аникьев[1]
доктор физико-математических наук, профессор
aaanikyev@mail.ru
Эмилия Николаевна Аникьева[2]
Ст. преподаватель
korol_0909@mail.ru
[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
г. Москва, Россия
[2]Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Приводится класс нелинейных уравнений, решение которых обычными методами затруднено вследствие неаналитичности первых и вторых производных в окрестности существования корней. Численные методы позволяют получить решение с заданной точностью методом последовательного сужения интервала, содержащего корень и, таким образом, его локализации. Преобразование исходных уравнений (и систем) с повышением их алгебраической симметрии позволяет открыть доступ к новым методам, значительно сокращающим время и машинные ресурсы необходимые для их численного решения.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, критические точки, симметрия, методы оптимизации, метод Ньютона-Рафсона, топология.

Нелинейными обычно называют алгебраическое уравнение, одна или несколько неизвестных в котором имеют степень отличающуюся от единицы. Нелинейными также являются так называемые трансцендентные уравнения – уравнения в которых неизвестная является аргументом показательной, тригонометрической, логарифмической, обратной тригонометрической или любой другой специальной функции.

К настоящему времени существуют аналитические решения алгебраических уравнений в виде полиномов до четвертого порядка включительно, соответственно огромное разнообразие нелинейных уравнений, отличных от вышеназванных полиномов не имеют аналитических решений и корни таких уравнений можно найти только приближенно с помощью численных методов. Одним из наиболее распространенных численных методов является метод итераций, или метод последовательных приближений, при котором исходное уравнение представлено в эквивалентном виде с возможностью получения последовательности значений неизвестной, сходящейся к корню. Алгебраического уравнение формально можно записать в виде:

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \qquad (1)$$

Здесь в левой части нелинейная функция n переменных. Обычно уравнение (1) в методе последовательных приближений заменяют равносильным уравнением вида:

$$x = g(x) \ , \qquad (2)$$

и на интервале содержащем корень получают последовательность точек

$$x_{k+1} = g(x_k) \qquad (3)$$

Если все полученные в последовательности (3) точки принадлежат интервалу содержащему корень и существует предел последовательности (3) при $k \to \infty$, то этот предел является корнем уравнения (2), а последовательность (3) –

последовательностью итераций для уравнения (2). При этом, не всякая последовательность может оказаться сходящейся. Применение метода итераций требует рассмотрения достаточных условий сходимости последовательности (3) к некоторому значению на интервале. Согласно существующей теореме [1], сходимость (3) возможна только если во-первых производная функции, стоящей в правой части (2) ограничена на интервале и во-вторых, значения этой функции принадлежат интервалу для любого значения аргумента на интервале. Тогда процесс итерации сходится при любом выборе начального значения аргумента, принадлежащем интервалу. Как же быть в случае, если вид нелинейной функции таков, что не выполняется одно из условий теоремы? В этом случае имеются методы сужения интервала содержащего корень и основанные на свойстве функций изменять знак при пересечении оси абсцисс. К методам сужения интервала относятся метод дихотомии (деления интервала пополам), метод хорд, метод Ньютона (касательных), метод секущих и т.д. Все они делятся на методы первого порядка и второго порядка. Методы первого порядка основаны на замене исходной функции некоторым линейным законом на интервале, содержащем корень, к ним относятся метод хорд, метод Ньютона (касательных), метод секущих. Методы второго порядка используют замену исходной функции известной нелинейной функцией или полиномом второго порядка на интервале; к ним относятся метод Риддера, метод Мюллера и т.д. Все они используют принцип получения последовательности точек, сходящихся к корню со скоростью, зависящей от метода. Как правило, эта скорость зависит от величины модуля первой или второй производной исходной функции.

Выбор метода численного решения нелинейных уравнений зависит от вида функции, наличия критических точек и особенностей производных функции в критической точке. Если в критической точке производные функции не существуют, имеют разрывы первого или второго рода, метод Ньютона и его модификации не применимы или применимы ограниченно, ввиду медленной сходимости последовательности точек к корню. Дело в том, что все они основаны на разложении функции вблизи корня в ряд Тейлора и шаг получаемой последовательности точек, сходящихся к корню определяется соотношением:

$$h_{k-1} = \left| \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \right| \tag{4}$$

На каждом шаге итерации, функция в числителе стремится к нулю, а производная функции в знаменателе стремится к бесконечности. Поэтому шаг стремится к нулю быстрее, чем последовательность точек сходится к решению, и программа итерации зацикливается. При не очень высокой точности поиска решения, используемая вами программа находит корень с точностью до 5-6 знаков после запятой, однако ценой медленной сходимости. Ясно, что повышение точности до 10^{-7} уже может привести к зацикливанию программы. Как же быть в случае, когда функция имеет такого рода особенности? Можно модифицировать метод Ньютона, например, фиксируя значение производной в начальной точке. В этом случае скорость сходимости решения к корню окажется линейной. Соответственно пользоваться методом Ньютона и его модификациями оказывается невозможным и надо применять методы второго порядка. Однако возможен другой подход к решению нелинейных уравнений – преобразованием исходного уравнения к виду с более высокой симметрией. В простейших случаях преобразование достигается возведением исходного уравнения в четную степень. Покажем этот метод на примере. Рассмотрим уравнение, описывающее эллиптическую кривую первого рода в виде:

$$y^2 = -2 - \left(\frac{1}{4} \cdot x\right)^3 + x \tag{5}$$

Чтобы не преобразовывать уравнение (5) к виду, позволяющему представить график в действительных переменных, выпишем аналогичное уравнение:

$$y^3 = -2 - \left(\frac{1}{4} \cdot x\right)^3 + x \tag{6}$$

График уравнения (6) представлен на рисунке 1.

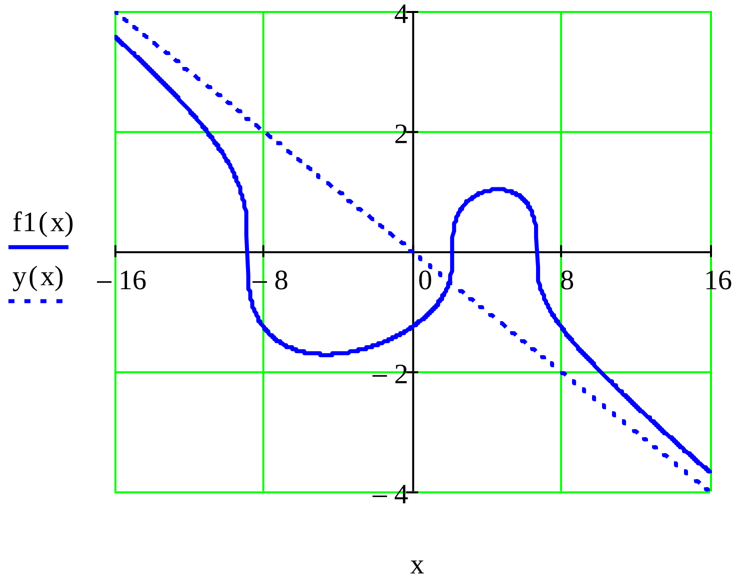

Рисунок 1 - График функции (6), преобразованной из эллиптической функции (5). Пунктиром показано уравнение асимптоты

Эллиптическое уравнение (6) имеет три критические точки. Однако в точках пересечения кривой с осью абсцисс (корни функции) первая производная имеет разрывы первого рода, а вторая производная – разрывы второго рода. Для иллюстрации на рисунке 2 приведен график функции (6) и её первой производной.

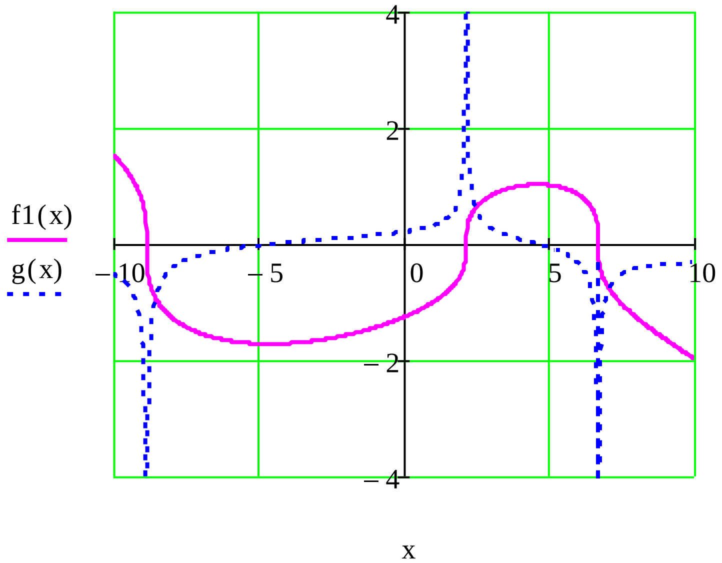

Рисунок 2 - График эллиптической функции (6) (сплошная линия) и её первой производной (пунктир)

Возведение функции (6) в квадрат изменяет её топологию, но не меняет положение корней. В этом случае, положение корней становится точками минимума функции, а точки перегиба исходной функции – точками излома.

$$F(x) = \sqrt[3]{\left(-2-\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)^3+x\right)^2} \tag{7}$$

На рисунке 3 представлен график преобразованной функции (7), показанной на рисунке 1.

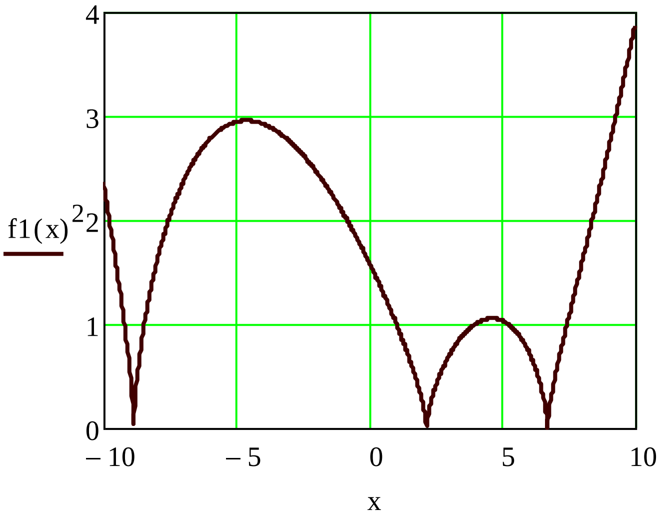

Рисунок 3 - График функции (6) после возведения её в квадрат

Преобразование, повышающее симметрию вещественной кривой позволяет применить другие методы поиска корня – методы оптимизации. Основной целью методов оптимизации функций многих переменных принято считать поиск таких систем переменных, которые обеспечивают экстремум исходной функции. В данном случае поиск минимумов функции можно проводить на основе мощных методов оптимизации, например, методом сканирования, методом наискорейшего градиентного спуска, методом Ньютона – Рафсона и т.д. [2]

Список литературы:

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука. 1970. 665 с

2. Аникьев А.А. Программирование в пакете Mathcad v. 15. Часть 2. Нелинейные уравнения и системы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2024. 152 с.

UDC 519.6

NONLINEAR EQUATIONS SOLVING BY INCREASING ALGEBRAIC SYMMETRY

Anatoly An. Anikiev[1]
Doctor of Physical-Technical Science, Professor
aaanikyev@mail.ru
Emiliya N. Anikieva[2]
Senior teacher of the Department of Mathematics
physics and informational technologies
korol_0909@mail.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University
Moscow, Russia
[2]Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Annotation. A class of nonlinear equations is presented, the solution of which by conventional methods is difficult due to the non-analyticity of the first and second derivatives near the roots existence. Numerical methods make it possible to obtain a solution with a given accuracy by sequentially narrowing the interval containing the root and, thus, its localization. Transforming the original equations (and systems) with increasing their algebraic symmetry makes it possible to open access to new methods that significantly reduce the time and machine resources required for their numerical solution.

Key words: nonlinear equations, critical points, symmetry, optimization methods, Newton-Raphson method, topology

Статья поступила в редакцию 01.02.2024; одобрена после рецензирования 20.03.2024; принята к публикации 22.03.2024.

The article was submitted 01.02.2024; approved after reviewing 20.03.2024; accepted for publication 22.03.2024.