УДК 519.8(075.8)

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ (С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ MAPLE)

Борис Игнатьевич Смагин
доктор экономических наук, профессор
bismagin@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, которая находит широкое применение в различных сферах человеческой деятельности, в первую очередь, в области экономики. Среди обилия различных постановок игровых ситуаций, в статье рассмотрена простейшая из них – матричная игра двух лиц с нулевой суммой. Проанализирован общий случай задач, не имеющих седловой точки и не допускающий решение задачи графическим методом. Решение всех задач проиллюстрировано с использованием системы символьной математики Maple.

Ключевые слова: матричная игра, седловая точка, система Maple, оптимальные стратегии.

Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, т.е. такую игру, в которой сумма выигрышей сторон рана нулю (иначе, выигрыш игрока A в точности равен проигрышу игрока B).

Игрок A выбирает одну из своих возможных стратегий A_i (i = 1, 2,…, m), а игрок B выбирает стратегию B_j (j = 1, 2,…, n), причем каждый выбор производится при полном незнании выбора другого игрока. В результате выигрыши $L_1(A_i, B_j)$ и $L_2(A_i, B_j)$ каждого из игроков удовлетворяют соотношению:

$$L_1(A_i, B_j) + L_2(A_i, B_j) = 0$$

При рассмотрении игр с нулевой суммой нет необходимости отдельно учитывать проигрыши или выигрыши обоих игроков, а можно ограничиться рассмотрением только выигрыша первого игрока (проигрыша второго игрока):

$$L_1(A_i,B_j) = -L_2(A_i, B_j) = L(A_i, B_j)$$

Цель игрока A – максимизировать функцию $L(A_i, B_j)$, и в свою очередь, цель игрока B – минимизировать эту же функцию. Таким образом, цели игроков оказываются прямо противоположными. При этом ни один из игроков не контролирует полностью значение $L(A_i, B_j)$, так как первый игрок распоряжается только значением A_i, а второй – только значением B_j. Целью теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т.е. определении для них оптимальных стратегий. Пусть $L(A_i, B_j) = a_{ij}$. Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки матрицы соответствуют стратегиям A_i, столбцы – стратегиям B_j. Матрица A называется *платежной* или матрицей игры. Элемент a_{ij} платежной матрицы – выигрыш игрока A, если он выбрал i – ю стратегию, а игрок B – выбрал j – ю стратегию.

Пусть игрок A выбирает некоторую стратегию A_i, тогда в худшем случае он получит выигрыш, равный $\min\limits_j a_{ij}$ Обобщая подобные рассуждения, игрок A должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Величина α – гарантированный выигрыш игрока А, называется нижней ценой игры. Стратегия, обеспечивающая игроку А получение величины α – максиминной.

При выборе некоторой стратегии B_j проигрыш игрока В не превысит максимального из значений элементов j – го столбца, т.е. меньше или равен $\max_i a_{ij}$

Рассмотрев множество $\max_i a_{ij}$ для различных значений j, игрок В, естественно, выберет такое его значение, при котором его максимальный проигрыш минимизируется:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Величина β называется верхней ценой игры, а соответствующая стратегия игрока В – минимаксной.

Если α = β, то игра является вполне определенной. Ее называют игрой с седловой точкой [1,3].

Игра m × n в общем случае не имеет наглядной геометрической интерпретации. Ее решение достаточно трудоемко при больших m и n, однако принципиальных трудностей не имеет, т.к. может быть сведено к решению задачи линейного программирования. Покажем это.

Рассмотрим игру, платежная матрица которой имеет размерность m×n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Платежная матрица не содержит седловой точки, поэтому решение игры представлено в смешанных стратегиях: **X** = $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и **Y** = $(y_1, y_2, \dots, y_n)$; x_1

$+ x_2 + \ldots + x_m = 1; y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$. Подход к определению решения игры при смешанных стратегиях также основывается на прежних критериях. Единственная разница заключается в том, что игрок А выбирает вероятности x_i ($i =1, 2,\ldots, m$) так, чтобы максимизировать наименьший ожидаемый выигрыш, тогда как игрок В выбирает y_j ($j = 1, 2,\ldots, n$) с целью минимизировать наибольший ожидаемый проигрыш.

Оптимальная стратегия игрока А удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку А средний выигрыш, не меньший, чем цена игры v, при любой стратегии игрока В и выигрыш, равный цене игры v, при оптимальной стратегии игрока В.

В случае если игрок В придерживается своей первой стратегии, игрок А получает выигрыш, равный $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq v$; при выборе игроком В второй стратегии, выигрыш игрока А составит $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq v$;…, при выборе игроком В своей последней (n – й) стратегии, выигрыш игрока А составит $a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq v$. Поэтому, для оптимальной стратегии игрока А имеем систему неравенств:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq v \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq v \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1) \\
a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq v \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \\
x_j \geq 0;\ j = 1, 2,\ldots, m
\end{gathered}$$

Будем считать, что цена игры $v > 0$ (если же $v < 0$, то можно прибавить такое положительное число К ко всем элементам платежной матрицы, что гарантирует положительность значения модифицированной цены игры). Таким образом, полагая $v > 0$, разделим все ограничения (1) на v. Тогда, обозначив $t_i = x_i/v$, получим:

$$\begin{gathered}
a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1 \\
a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1
\end{gathered}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1$$

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = 1/v$$

$$t_j \geq 0; j = 1, 2,\ldots, m$$

Цель игрока А – максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры v. Максимизация цены игры v эквивалентна минимизации величины 1/v. Как следует из предпоследнего ограничения системы (2), эта величина равна сумме переменных t_i. Таким образом, учитывая это ограничение в функции цели и удаляя его из системы (2), получим задачу линейного программирования:

$$Z = t_1 + t_2 + \ldots + t_m \rightarrow \min \quad (3)$$

$$a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1$$

$$a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1$$

$$t_j \geq 0; j = 1, 2,\ldots, m$$

Для определения оптимальной стратегии игрока В следует учесть, что он стремится минимизировать наибольший ожидаемый проигрыш, т.е. максимизировать 1/v. Оптимальная стратегия игрока В удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку В средний проигрыш, не превосходящий цены игры при любой стратегии игрока А и проигрыш, равный цене игры при оптимальной стратегии игрока А.

При выборе игроком А своей первой стратегии, проигрыш игрока В составит $a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq v$; если игрок А изберет вторую стратегию, то проигрыш игрока В составит $a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq v$;…, при выборе игроком А своей последней (m – й) стратегии проигрыш игрока В составит $a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq v$. Поэтому, для оптимальной стратегии игрока В имеем систему неравенств:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq v$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq v$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le v$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$$

$$y_j \ge 0;\ j = 1, 2,\ldots, n$$

Поделив все ограничения (5) на $v>0$ и обозначая $u_j= y_j/v$, получим:

$$a_{11}u_1+a_{12}u_2+\ldots+a_{1n}u_n \le 1$$

$$a_{21}u_1+a_{22}u_2+\ldots+a_{2n}u_n \le 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$a_{m1}u_1+a_{m2}u_2+\ldots+a_{mn}u_n \le 1$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1/v$$

$$u_j \ge 0;\ j = 1,2,\ldots,n$$

Как следует из предпоследнего ограничения системы (6), величина, обратная цене игры равна сумме переменных u_i ($i =1, 2,\ldots, n$). Цель игрока B – минимизировать величину v или минимизировать 1/v. Таким образом, имеем:

$$F = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \to \max \quad (7)$$

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \le 1$$

$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \le 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \le 1$$

$$u_j \ge 0;\ j = 1, 2,\ldots, n$$

Следовательно, для определения оптимальной стратегии игрока A необходимо решить задачу линейного программирования (3) – (4), а для игрока B – задачу (7) – (8). Решая задачу (3) – (4), определяем $Z_{min} = 1/v$, откуда находим значение цены игры v. Вычисленные значения t_i позволяют определить $x_i = v \cdot t_i$. Решение задачи (7) – (8) позволяет определить $F_{max} = 1/v$, откуда легко находится значение цены игры v. Вычисленные значения u_j позволяют определить $y_j = v \cdot u_j$.

Следует отметить один важный факт: задача (7) – (8) является двойственной к задаче (3) – (4). Используя свойство симметричности, можно решить одну из них, требующую меньших вычислений, а решение второй задачи найти на основании оптимального плана двойственной задачи.

Теперь необходимо рассмотреть вопрос о существовании решения матричной игры двух лиц с нулевой суммой. Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. Любая матричная игра двух лиц с нулевой суммой имеет решение.

Пример1. Найти решение игры, заданной платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение: Данная игра не имеет седловой точки ($\alpha = 6$; $\beta = 7$). В соответствии с (3) – (4), для определения оптимальной стратегии игрока А имеем следующую задачу линейного программирования:

$$Z = t_1 + t_2 + t_3 \to \min$$

$$7t_1 + 6t_2 + 5t_3 \geq 1$$

$$6t_1 + 7t_2 + 8t_3 \geq 1$$

$$7t_1 + 9t_2 + 4t_3 \geq 1$$

$$5t_1 + 8t_2 + 6t_3 \geq 1$$

$$t_i \geq 0;\ i = 1,2,3.$$

Двойственная задача для определения оптимальной стратегии игрока В (в соответствии с (7) – (8)) имеет вид:

$$F = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \to \max$$

$$7u_1 + 6u_2 + 7u_3 + 5u_4 \leq 1$$

$$6u_1 + 7u_2 + 9u_3 + 8u_4 \leq 1$$

$$5u_1 + 8u_2 + 4u_3 + 6u_4 \leq 1$$

$$u_j \geq 0;\ j = 1,2,3,4.$$

Меньших вычислений требует задача определения оптимальной стратегии для игрока B, которую будем решать обычным симплексным методом. Введя дополнительные переменные u_5, u_6, u_7, получим:

$$F = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \to \max$$

$$7u_1 + 6u_2 + 7u_3 + 5u_4 + u_5 = 1$$

$$6u_1 + 7u_2 + 9u_3 + 8u_4 + u_6 = 1$$

$$5u_1 + 8u_2 + 4u_3 + 6u_4 + u_7 = 1$$

$$u_j \geq 0;\ j = 1,2,\ldots,7$$

Строим первую симплексную таблицу, введя в базис векторы $\mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_6$, $\mathbf{A}_7$.

i	Базис	C базиса	**B**	1 $\mathbf{A}_1$	1 $\mathbf{A}_2$	1 $\mathbf{A}_3$	1 $\mathbf{A}_4$	0 $\mathbf{A}_5$	0 $\mathbf{A}_6$	0 $\mathbf{A}_7$
1	$\mathbf{A}_5$	0	1	7	6	7	5	1	0	0
2	$\mathbf{A}_6$	0	1	6	7	9	8	0	1	0
3	$\mathbf{A}_7$	0	1	5	8	4	6	0	0	1
m+1	$Z_j - C_j$		0	–1	–1	–1	–1	0	0	0

На первой итерации вводим в базис вектор $\mathbf{A}_1$ и выводим $\mathbf{A}_5$. Используя преобразования Жордана – Гаусса, переходим к следующей симплексной таблице.

i	Базис	C базиса	**B**	1 $\mathbf{A}_1$	1 $\mathbf{A}_2$	1 $\mathbf{A}_3$	1 $\mathbf{A}_4$	0 $\mathbf{A}_5$	0 $\mathbf{A}_6$	0 $\mathbf{A}_7$
1	$\mathbf{A}_1$	1	1/7	1	6/7	1	5/7	1/7	0	0
2	$\mathbf{A}_6$	0	1/7	0	13/7	3	26/7	–6/7	1	0
3	$\mathbf{A}_7$	0	2/7	0	26/7	–1	17/7	–5/7	0	1
m+1	$Z_j - C_j$		1/7	0	–1/7	0	–2/7	1/7	0	0

На следующем шаге вводим в базис вектор $\mathbf{A}_4$ и выводим $\mathbf{A}_6$. Проведя необходимые преобразования, переходим к следующей таблице.

i	Базис	C базиса	**B**	1 **A_1**	1 **A_2**	1 **A_3**	1 **A_4**	0 **A_5**	0 **A_6**	0 **A_7**
1	**A_1**	1	3/26	1	1/2	11/26	0	4/13	–5/26	0
2	**A_4**	1	1/26	0	1/2	21/26	1	–3/13	7/26	0
3	**A_7**	0	5/26	0	5/2	–77/26	0	-2/13	–17/26	1
m+1	$Z_j – C_j$		2/13	0	0	3/13	0	1/13	1/13	0

В данной таблице получен оптимальный план, так как оценки (m +1)-й строки неотрицательны. Оптимальный план задачи имеет вид: **U** = (3/26; 0; 0; 1/26); F_{max} = 1/v = 2/13, откуда цена игры v = 13/2. Учитывая, что $y_j = u_j \cdot v$, получаем оптимальную стратегию игрока B: **Y** = (3/4; 0; 0; 1/4), т.е. игрок B выбирает первую стратегию с вероятностью 3/4 и четвертую стратегию с вероятностью 1/4, при этом его проигрыш игроку A составит 13/2.

Оптимальный план для игрока A получим, используя оценки (m+1)-й строки: $t_1 = t_2 = 1/13$; $t_3 = 0$. Следовательно (учитывая, что $x_i = t_i \cdot v$), получим: **X** = (1/2; 1/2; 0), т.е. игрок A выбирает как первую, так и вторую стратегии с вероятностью 1/2, при этом его выигрыш составит 13/2.

Определим теперь оптимальные стратегии игроков A и B, используя программу символьной математики Maple, причем здесь нет необходимости решать задачу на максимум для игрока B, а затем из полученного оптимального решения на основе последней симплексной таблицы получать решение двойственной к ней задачи для игрока A. Гораздо удобнее решать отдельно задачу линейного программирования для каждого из игроков [2]:

```
> # Определяем оптимальную стратегию игрока A
> with(simplex) :
> minimize(t1 + t2 + t3, {7·t1 + 6·t2 + 5·t3 ≥ 1, 6·t1 + 7·t2 + 8·t3
      ≥ 1, 7·t1 + 9·t2 + 4·t3 ≥ 1, 5·t1 + 8·t2 + 6·t3 ≥ 1, t1 + t2
      + t3 − z = 0}, NONNEGATIVE);
```

$$\left\{ t1 = \frac{1}{13},\ t2 = \frac{1}{13},\ t3 = 0,\ z = \frac{2}{13} \right\}$$

```
> restart :
> # Теперь определяем оптимальную стратегию игрока B
> with(simplex) :
```

```
> maximize(u1 + u2 + u3 + u4, {7·u1 + 6·u2 + 7·u3 + 5·u4 ≤ 1, 6
    ·u1 + 7·u2 + 9·u3 + 8·u4 ≤ 1, 5·u1 + 8·u2 + 4·u3 + 6·u4
    ≤ 1, u1 + u2 + u3 + u4 − z = 0}, NONNEGATIVE);
```

$$\left\{u1 = \frac{1}{13},\ u2 = \frac{1}{13},\ u3 = 0,\ u4 = 0,\ z = \frac{2}{13}\right\}$$

Оптимальная стратегия игрока В не совпала с результатом, полученным при ручном счете. В таблице 3 оценка оптимальности ($Z_j - C_j$) при векторе A_2, не вошедшем в базис, равна нулю, что свидетельствует о наличии альтернативного оптимального решения.

Пример 2. Найти решение игры, заданной следующей платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение: Данная игра не имеет седловой точки ($\alpha = -4$; $\beta = 3$). Так как нижняя цена игры равна – 4, то возможно, что значение игры не будет положительным. В этом случае сведение матричной игры к задаче линейного программирования становится некорректным. Для того чтобы цена игры была заведомо положительна, прибавим к каждому элементу платежной матрицы число К = 6. Тогда модифицированная платежная матрица примет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 12 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Задача линейного программирования по определению оптимальной стратегии игрока В для модифицированной платежной матрицы имеет вид:

$$Z = u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \max$$

$$7u_1 + 2u_2 + 9u_3 \le 1$$

$$2u_1 + 9u_2 + 12u_3 \le 1$$

$$9u_1 + 8u_3 \le 1$$

$$u_j \ge 0;\ j = 1, 2, 3.$$

Введя дополнительные переменные u_4, u_5, u_6, приведем задачу линейного программирования к каноническому виду:

$$Z = u_1 + u_2 + u_3 \to \max$$

$$7u_1 + 2u_2 + 9u_3 + u_4 = 1$$

$$2u_1 + 9u_2 + 12u_3 + u_5 = 1$$

$$9u_1 + 8u_3 + u_6 = 1$$

$$u_j \geq 0;\ j = 1,2,\ldots,6.$$

Построенную задачу решаем симплексным методом. На первом шаге строим симплексную таблицу, выбрав в качестве базисных векторов $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$ и $\mathbf{A}_6$.

i	Базис	С базиса	**В**	1 $\mathbf{A}_1$	1 $\mathbf{A}_2$	1 $\mathbf{A}_3$	0 $\mathbf{A}_4$	0 $\mathbf{A}_5$	0 $\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_4$	0	1	7	2	9	1	0	0
2	$\mathbf{A}_5$	0	1	2	9	12	0	1	0
3	$\mathbf{A}_6$	0	1	9	0	8	0	0	1
m+1	$Z_j - C_j$		0	–1	–1	–1	0	0	0

На втором шаге вводим в базис вектор $\mathbf{A}_1$ и выводим $\mathbf{A}_6$. Проведя преобразования Жордана – Гаусса, получаем вторую симплексную таблицу.

i	Базис	С базиса	**В**	1 $\mathbf{A}_1$	1 $\mathbf{A}_2$	1 $\mathbf{A}_3$	0 $\mathbf{A}_4$	0 $\mathbf{A}_5$	0 $\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_4$	0	2/9	0	2	25/9	1	0	–7/9
2	$\mathbf{A}_5$	0	7/9	0	9	92/9	0	1	–2/9
3	$\mathbf{A}_1$	1	1/9	1	0	8/9	0	0	1/9
m+1	$Z_j - C_j$		1/9	0	–1	–1/9	0	0	1/9

На следующем шаге вводим в базис вектор $\mathbf{A}_2$ и исключаем из базиса вектор $\mathbf{A}_5$. Проведя соответствующие вычисления, получаем третью симплексную таблицу:

i	Базис	С базиса	**В**	1 $\mathbf{A}_1$	1 $\mathbf{A}_2$	1 $\mathbf{A}_3$	0 $\mathbf{A}_4$	0 $\mathbf{A}_5$	0 $\mathbf{A}_6$

1	**A**$_4$	0	4/81	0	0	41/81	1	–2/9	–59/81
2	**A**$_2$	1	7/81	0	1	92/81	0	1/9	–2/81
3	**A**$_1$	1	1/9	1	0	8/9	0	0	1/9
m+1	$Z_j – C_j$		16/81	0	0	83/81	0	1/9	7/81

В данной таблице получен оптимальный план, так как оценки (m + 1)-й строки неотрицательны. Оптимальный план для игрока В имеет вид: **U** = (1/9; 7/81; 0). Модифицированное значение цены игры $Z'_{max} = 1/v' = 16/81$, следовательно, модифицированное значение игры равно 81/16. Учитывая, что $y_j = u_j \cdot v'$, получим оптимальную стратегию игрока В: **Y** = (9/16; 7/16; 0). Оптимальную стратегию игрока А получим, используя оценки (m+1)-й строки: $t_1 = 0$; $t_2 = 1/9$; $t_3 = 7/81$. Следовательно, учитывая, что $x_i = t_i \cdot v'$, получим: **X** = (0; 9/16; 7/16). Истинное значение цены игры будет получено вычитанием К = 6 из модифицированного значения:

$$v = v' – K = 81/16 – 6 = – 15/16.$$

Приведем решение в пакете Maple:

> *restart*;
> *with*(*simplex*) :
> *# Определяем оптимальную стратегию игрока A*
> $minimize(t1 + t2 + t3, \{7 \cdot t1 + 2 \cdot t2 + 9 \cdot t3 \geq 1, 2 \cdot t1 + 9 \cdot t2 \geq 1, 9 \cdot t1 + 12 \cdot t2 + 8 \cdot t3 \geq 1, t1 + t2 + t3 - z = 0\}, NONNEGATIVE);$

$$\left\{t1 = 0, t2 = \frac{1}{9}, t3 = \frac{7}{81}, z = \frac{16}{81}\right\}$$

> *# Теперь определяем оптимальную стратегию игрока B*
> $maximize(u1 + u2 + u3, \{7 \cdot u1 + 2 \cdot u2 + 9 \cdot u3 \leq 1, 2 \cdot u1 + 9 \cdot u2 + 12 \cdot u3 \leq 1, 9 \cdot u1 + 8 \cdot u3 \leq 1, u1 + u2 + u3 - f = 0\}, NONNEGATIVE);$

$$\left\{f = \frac{16}{81}, u1 = \frac{1}{9}, u2 = \frac{7}{81}, u3 = 0\right\}$$

Список литературы:

1. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики / М.: МАКС Пресс. 2005. 272с.

2. Касюк С.Т., Логвинова А.А. Высшая математика на компьютере в

программе Maple 14 / Челябинск: ЮУрГУ. 2011. 57с.

3. Смагин Б.И. Экономико-математические методы: учебник для академического бакалавриата // 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Юрайт. 2017. 272с.

UDC 519.8(075.8)

SOLVING A MATRIX GAME OF TWO PERSONS WITH A ZERO SUM (USING THE MAPLE SYSTEM)

Boris I. Smagin
doctor of economics, professor
bismagin@mail.ru
Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Abstract. Game theory is a mathematical theory of conflict situations that finds wide application in various spheres of human activity, primarily in the field of economics. Among the abundance of different statements of game situations, the simplest of them is considered in the article – a matrix game of two persons with a zero sum. The general case of problems that do not have a saddle point and do not allow solving the problem by a graphical method is analyzed. The solution of all problems is illustrated using the Maple symbolic mathematics system.

Keywords: matrix game, saddle point, Maple system, optimal strategies.

Статья поступила в редакцию 10.05.2023; одобрена после рецензирования 15.06.2022; принята к публикации 30.06.2023.

The article was submitted 10.05.2023; approved after reviewing 15.06.2022; accepted for publication 30.06.2023.