УДК 517.5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Борис Игнатьевич Смагин
доктор экономических наук, профессор
bismagin@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
Мичуринск, Россия

Аннотация. Одним из основных уравнений математической физики является уравнение колебаний струны, простейшим случаем которой является задача Коши. В статье рассмотрен алгоритм решения данной задачи, реализованный на конкретных примерах.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, уравнение колебаний струны, задача Коши, формула Даламбера.

Решение дифференциальных уравнений в частных производных представляет значительные трудности, обусловленные тем, что большинство из них не имеют аналитического решения. Системы же этих уравнений как правило не разрешимы. Наши попытки модифицировать производственную функцию с постоянной эластичностью замещения, логические предпосылки которой свелись к системе дифференциальных уравнений в частных производных, показали, что она не имеет аналитического решения даже для двух переменных [3]. Поэтому преимущественно эти уравнения решают численными методами [1-2].

К классу задач математической физики, имеющих аналитическое решение, относится уравнение колебаний струны, простейшим случаем которой является задача Коши, для решения которой используют формулу Даламбера.

Решение задачи Коши с помощью формулы Даламбера.

Прежде чем решать задачу о колебаниях закрепленной струны, мы рассмотрим более простую задачу – о колебаниях бесконечной струны. Если представить себе очень длинную струну, то ясно, что на колебания, возникшие в ее средней части, концы струны не будут оказывать заметного влияния. Так, если взять длинную натянутую веревку и слегка качнуть ее в середине, то по веревке влево и вправо побегут волны. Картина начнет искажаться только тогда, когда волны дойдут до концов веревки и, отразившись, пойдут обратно. Следовательно, не учитывая влияния концов струны, мы тем самым не будем учитывать влияния отраженных волн. Рассматривая свободные колебания, мы должны, таким образом, решить однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x), \qquad (2)$$

где функции f(x) и F(x) заданы на всей числовой оси. Никакие краевые условия на искомую функцию u(x,t) не накладываются. Такая задача называется задачей с начальными условиями или задачей Коши. Метод решения ее, который мы сейчас изложим, называется методом Даламбера или методом бегущих волн.

Прежде всего, покажем, что общее решение уравнения (1), т.е. решение, зависящее от двух произвольных функций, имеет вид

$$u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at), \qquad (3)$$

где функции φ и ψ предполагаются дважды дифференцируемыми. Действительно, последовательно дифференцируя, находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x-at)+\psi'(x+at); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x-at)+\psi''(x+at);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''(x-at)+a^2\psi''(x+at).$$

Отсюда ясно, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, т.е. что равенство (1) соблюдается.

Наша задача состоит теперь в том, чтобы, пользуясь начальными условиями (2), определить неизвестные функции φ и ψ. Полагая в (3) t = 0 и подставляя выражение для u(x,0) в первое из условий (2), получим

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x). \qquad (4)$$

Полагая теперь t = 0 в выражении для $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и пользуясь вторым условием (2), придем к уравнению

$$-a\varphi'(x)+a\psi'(x)=F(x). \qquad (5)$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до x, получим соотношение

$$-a\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]+a\left[\psi(x)-\psi(0)\right]=\int_0^x F(x)\,dx,$$

которое приведем к виду

$$a\left[\varphi(0)-\psi(0)\right]+a\left[\psi(x)-\varphi(x)\right]=\int\limits_0^x F(x)dx \Rightarrow$$

$$\left[\varphi(0)-\psi(0)\right]+\left[\psi(x)-\varphi(x)\right]=\frac{1}{a}\int\limits_0^x F(x)dx.$$

Первое слагаемое в левой части полученного равенства является константой, поэтому полагая C= – φ(0) + ψ(0), получим

$$-\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{a}\int\limits_0^x F(x)\,dx+C, \qquad (6)$$

Из системы уравнений (4) и (6) находим искомые функции φ(x) и ψ(x):

$$\begin{cases} \varphi(x)=\dfrac{1}{2}f(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^x F(x)\,dx-\dfrac{C}{2} \\ \psi(x)=\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^x F(x)\,dx+\dfrac{C}{2} \end{cases} \qquad (7)$$

Заменяя в формулах (7) аргумент x соответственно на x – at и x + at и подставляя полученные выражения в формулу (3), найдем функцию u(x, y):

$$u(x,t)=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at} F(x)\,dx+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} F(x)\,dx.$$

Замечая, что

$$-\int\limits_0^{x-at} F(x)\,dx+\int\limits_0^{x+at} F(x)\,dx=\int\limits_{x-at}^{0} F(x)\,dx+\int\limits_0^{x+at} F(x)\,dx=\int\limits_{x-at}^{x+at} F(x)\,dx,$$

придадим решению u(x,t) следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(x)\,dx. \qquad (8)$$

Формула (8) называется решением Даламбера задачи Коши для уравнения колебаний струны.

Пример 1. Найти решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0}=x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=1.$$

Решение. Решение ищем в виде формулы Даламбера (8):
В нашем случае: a = 1, f(x) = x^2, F(x) = 1. Поэтому

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}dx=x^2+t^2+t.$$

Ответ: $u(x,t)=x^2+t^2+t.$

Пример 2. Найти решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0}=x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=\cos^2 x.$$

Решение. Решение ищем в виде формулы Даламбера (8):
В нашем случае: a = 2, f(x) = x, F(x) = $\cos^2$x. Поэтому

$$\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}=\frac{(x-2t)+(x+2t)}{2}=x.$$

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(x)dx=\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{8}\int_{x-2t}^{x+2t}(1+\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{x-2t}^{x+2t}=\frac{1}{8}\left(x+2t-x+2t+\frac{1}{2}\left[\sin(2x+4t)-\sin(2x-4t)\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{8}(4t+\sin 4t\cdot\cos 2x).$$

Таким образом, на основе формулы (8), имеем:

$$u(x,t)=x+\frac{1}{8}(4t+\sin 4t\cdot\cos 2x).$$

Список литературы:

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М: МГТУ. 2002. 368 с.

2. Плохотников К.Э. Вычислительные методы. Теория и практика в среде MATLAB: курс лекций. Учебное пособие для вузов. 2-е изд., испр. М.: Горячая линия – Телеком. 2013. 496с.

3. Смагин Б.И. К вопросу об идентификации и модификации производственной функции с постоянной эластичностью замещения // Вестник Мичуринского государственного аграрного университета. 2014. №5. С. 71 – 76.

UDC 517.5

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE STRING OSCILLATION EQUATION

Boris Ig. Smagin

Doctor of Economics, Professor

bismagin@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University

Michurinsk, Russia

Abstract. One of the basic equations of mathematical physics is the equation of string vibrations, the simplest case of which is the Cauchy problem. The article considers an algorithm for solving this problem, implemented on specific examples.

Keywords: partial differential equation, string oscillation equation, Cauchy problem, D'alembert formula.

Статья поступила в редакцию 10.05.2023; одобрена после рецензирования 15.06.2022; принята к публикации 30.06.2023.

The article was submitted 10.05.2023; approved after reviewing 15.06.2022; accepted for publication 30.06.2023.