УДК 514.83: 514.762.3

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА

Анатолий Анатольевич Аникьев[1]
доктор физико-математических наук, профессор
aaanikiev@mail.ru
Эмилия Николаевна Аникьева[2]
Старший преподаватель
korol_0909@mail.ru
[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана
г. Москва, Россия
[2]Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Представлены подходы к решению уравнений Пфаффа. Обращается внимание на геометрическую интерпретацию самого уравнения, условий его интегрирования и решений. Рассмотрены примеры решений с иллюстрациями.

Ключевые слова: потоки, расслоения, вектор направления потока, уравнение плоскости, дифференциальное уравнение.

Введение.

Различные области науки, такие как химия, физика, социология, экономика и т.д. оперируют данными, описывающими поведение (эволюцию) сложных систем в пространстве и во времени. В сложной системе существуют определенные связи между величинами, которые мы будем называть параметрами системы или переменными системы. Эти переменные и связи между ними в общем случае описывают поведение системы. Чтобы выявить эти связи и согласовать результаты с опытными данными приходится записывать определенные уравнения «движения» или баланса потоков различных характерных величин.

Основные определения

Одним из таких дифференциальных уравнений, к которому приходят в процессе решения исходных уравнений «движения» потоков величин может быть уравнение Пфаффа. В n- мерном пространстве переменных R^n, описывающих систему можно ввести вектор переменных с компонентами

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)^T .$$

Тогда уравнение Пфаффа в пространстве n переменных запишется в виде:

$$P_1(\overline{x})dx_1 + P_2(\overline{x})dx_2 + \dots + P_n(\overline{x})dx_n = 0 . \qquad (1)$$

Здесь $P_k(\overline{x})$- непрерывные дифференцируемые функции n переменных. Уравнению (1) можно дать простую геометрическую интерпретацию, если представить, что функции $P_k(\overline{x})$ есть компоненты некоторого векторного поля в n- мерном пространстве:

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^{n} P_k(\overline{x}) \cdot \overline{e}_k$$, где $\overline{e}_k$ - набор единичных векторов базиса, (2)

тогда уравнение (1) есть скалярное произведение вектора поля направлений и некоторого вектора, касательного плоскости, перпендикулярной потоку вектора $\bar{F}$, другими словами, если мы определим вектор, касательный плоскости, перпендикулярной потоку вектора в каждой его точке в виде

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^{n} \bar{e}_k \cdot dx_k \ ,$$

То уравнение (1) есть скалярное произведение $(\bar{F} \cdot \bar{v}) = 0$. Отсюда становится понятным цель решения уравнения Пфаффа. Решение уравнения (1) позволяет получить интегральные поверхности, перпендикулярные векторному полю – срезы потока вектора $\bar{F}$ в каждой точке, задаваемой начальными условиями.

Подходы к решению уравнения Пфаффа

В трехмерном пространстве R^3 уравнение Пфаффа запишется в виде:

$$P(x,y,z) \cdot dx + Q(x,y,z) \cdot dy + R(x,y,z) \cdot dz = 0 \qquad (3)$$

Если векторное поле, имеющее компоненты *(P, Q, R)* потенциально, то есть поле определяется как градиент некоторой функции *U(x, y, z)*, то нахождение решений уравнения (3), поверхностей уровня, перпендикулярных потоку состоит просто в интегрировании левой части (3) по всем x, y, z начиная с точки, заданной начальными условиями.

Если векторное поле не потенциально, можно предложить два подхода к решению (3). Можно задать величины x, y, z как функции некоторого параметра p. Если две из трех величин зависят от этого параметра, то третью величину можно найти из простого дифференциального уравнения. Пусть задана произвольная функция, описывающая соотношения между x, y и z:

$$u(x(p), y(p), z(p)) = 0 \qquad (4)$$

Дифференцируя по p соотношение (4), получим

$$u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz = 0 \qquad (5)$$

Уравнения (4) и (5) можно разрешить относительно двух дифференциалов и из системы двух дифференциальных уравнений найти связь двух переменных с третьей переменной.

Во втором подходе одну из трех переменных считают функцией двух других.

Например, считая $z(x, y)$ и полагая $R \neq 0$, находим из (3)

$$dz = P_1 \cdot dx + Q_1 \cdot dy \text{, где } P_1 = -\frac{P}{R},\ Q_1 = -\frac{Q}{R} \quad (6)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= P_1(x, y, z) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= Q_1(x, y, z) \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференцируя первое уравнение по y , а второе по x получим

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} \cdot Q_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} \cdot P_1 \quad (8)$$

Подставляя в (8) обозначения из (6), соотношение (8) можно переписать в виде

$$P \cdot (\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}) + Q \cdot (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}) + R \cdot (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 0 . \quad (9)$$

Соотношение (9) можно интерпретировать как скалярное произведение векторного поля и вихря векторного поля:

$$(\bar{F} \cdot rot\bar{F}) = 0$$

Это есть условие полной интегрируемости уравнения Пфаффа или, что то же самое, через каждую область в пространстве *(x, y, z)* проходит одна и только одна интегральная поверхность системы (7) или поверхность, в каждой точке перпендикулярная потоку уравнения (3).

В первом подходе решением уравнения Пфаффа являются кривые ортогональные заданному векторному полю направлений, это направление задается вектором с компонентами *P, Q, R.* Во втором подходе ищутся поверхности, ортогональные заданному полю направлений и имеющие в каждой точке пространства касательные плоскости. Эти точки выбираются исходя из условий задачи.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Предположим, нам задано уравнение Пфаффа в форме:

$$z^2 \cdot dx + z \cdot dy + (3 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y) \cdot dz = 0 . \tag{10}$$

Найти общее решение уравнения (10), т.е. установить уравнение плоскости, в каждой точке перпендикулярной потоку вектора направлений, задаваемыми функциями при дифференциалах в (10).

Решение:

Проверим условие интегрируемости этого уравнения с помощью соотношения (9). Имеем

$$P = z^2,\ Q = z,\ R = 3xz + 2y$$

$$z^2 \cdot (1-2) + z \cdot (3z - 2z) + (3xz + 2y) \cdot (0-0) = -z^2 + z^2 = 0$$

Очевидно, условие интегрируемости выполняется.

Выбираем теперь переменную z в качестве параметра, считая x(z) и y(z) функциями z. Тогда из уравнения (10) при z ≠ 0 находим

$$z^2 \cdot dx + z \cdot dy = 0 .$$

Интегрируя это уравнение, находим связь между x и y через функцию u(z):

$$u(z) = z \cdot x + y .$$

Выражаем отсюда, например y и, после подстановки в исходное уравнение (10), получаем дифференциальное уравнение описывающее связь между функцией u(z) и переменной z:

$$z^2 dx + zd(u(z) - zx) + (3xz + 2 \cdot (u(z) - xz))dz = 0 .$$

Или дифференцируя и раскрывая скобки получим:

$$z^2 dx + zdu - z^2 dx - xzdz + xzdz + 2udz = 0$$

или

$$zdu + 2udz = 0$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dz}{z}$$

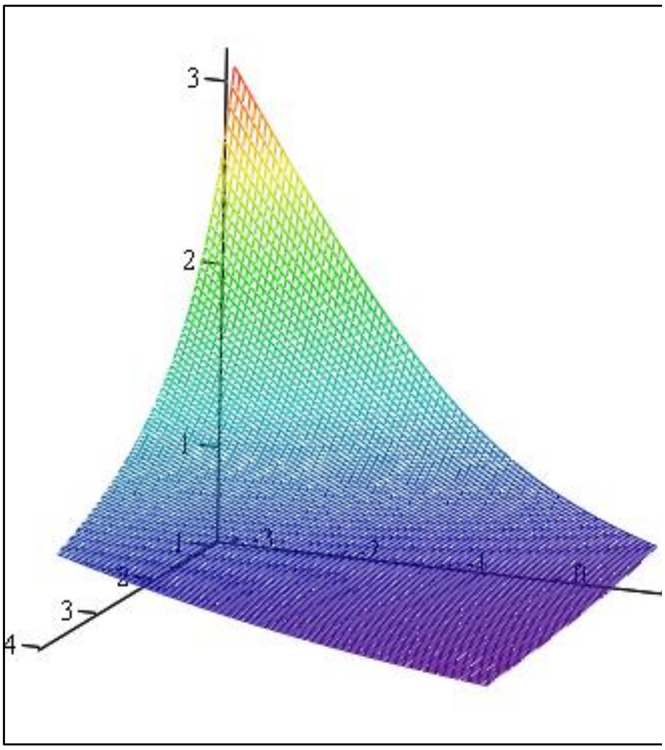
После интегрирования находим

$$C = u \cdot z^2$$

И после подстановки функции u(z) получаем уравнение поверхности

$$x \cdot z^3 + y \cdot z^2 = c \,. \qquad (11)$$

В качестве иллюстрации поверхность (11) в частном случае с = 1 представлена на рисунке 1.



М

Рисунок 1 - Интегральная поверхность (11), перпендикулярная вектору направлений потока (10) при частном выборе постоянной с = 1 и интервалах изменения переменных х$\in$ [1, 4] и у $\in$[-3,1] .

Пример 2. Дано уравнение Пфаффа. Проверить условия интегрируемости и найти интегральные многообразия [2, стр. 370]

$$(yz - z^2)dx - xzdy + xydz = 0 \qquad (12)$$

Проверим условие интегрируемости уравнения (12) с помощью соотношения (9):

$$(yz - z^2) \cdot (-x - x) + (-xz) \cdot (y - y + 2z) + xy \cdot (z + z) = 0$$

Или

$$-2xyz + 2xz^2 - 2xz^2 + 2xyz = 0 .$$

Очевидно, условие интегрирования выполняется. Теперь наша задача найти решение уравнения (12). Возможно несколько альтернативных вариантов решения уравнения Пфаффа.

Вариант 1.

Предположим, что уравнение допускает интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{xyz}$. Умножаем на него уравнение (12), получим:

$$(1 - \frac{z}{y}) \cdot \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0 \qquad (13)$$

Выбираем x в качестве постоянного параметра, следовательно, *dx = 0* и интегрируем уравнение относительно y и z:

$$-\ln(y) + \ln(z) = u(x) . \qquad (14)$$

Или

$$\frac{z}{y} = e^{u(x)} \qquad (15)$$

При подстановке (14), (15) в уравнение (13) мы должны получить обыкновенное дифференциальное уравнение относительно *x* и *u(x)* Поучаем:

$$(1 - e^u) \cdot \frac{dx}{x} + du = 0 \qquad (16)$$

Решаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\ln(\frac{e^u}{1 - e^u}) = -\ln(x) + \ln C \qquad (17)$$

Из (17) найдем

$$\frac{e^u}{1 - e^u} = \frac{C}{x}$$

Подставляя сюда (15) получим уравнение интегрального многообразия:

$$\frac{xz}{y-z}=C\ . \tag{18}$$

Вариант 2.

Преобразуем уравнение (12):

$$z^2\cdot\left(\frac{y}{z}-1\right)\cdot dx - x\cdot z^2\cdot\left(\frac{zdy-ydz}{z^2}\right)=0 \tag{19}$$

Второе слагаемое содержит в скобках полный дифференциал функции $d(\frac{y}{z})$. Введем обозначение $u(x)=\frac{y}{z}$. Тогда уравнение (19) перепишется как обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными в виде

$$(u-1)\cdot dx - xdu = 0$$

После интегрирования получим

$$u-1=C\cdot x\ .$$

После подстановки переменной u получим уравнение интегрального многообразия (поверхности):

$$\frac{y-z}{xz}=C \tag{20}$$

Вариант 3.

Замену переменных часто можно использовать для решения однородного уравнения Пфаффа, в котором функции P, Q, R являются однородными функциями одного порядка. Применим этот способ для решения уравнения (12). Выполним в нем замену $x=zu,\quad y=zv$. Тогда, считая $z \neq 0$, получим уравнение

$$z^2\cdot(v-1)\cdot(zdu+udz)-z^2u\cdot(zdv+vdz)+z^2\cdot uvdz=0 \tag{21}$$

Как видно, одинаковый порядок функций P, Q, R открывает возможность сокращения этого уравнения на z^2 . После раскрытия скобок получим уравнение

$$(v-1)\cdot zdu - uzdv + u\cdot(v-1)dz = 0 \qquad (22)$$

Умножение этого уравнения на очевидный интегрирующий множитель $\mu = \dfrac{1}{u(v-1)z}$ при выполнении условий $u \neq 0$ $v \neq 1$ $z \neq 0$ позволяет привести это уравнение к интегрируемому уравнению в полных дифференциалах для нахождения уравнения поверхности уровня:

$$U(x,y,z) = \int \frac{du}{u} - \int \frac{dv}{v-1} + \int \frac{dz}{z} = C \qquad (23)$$

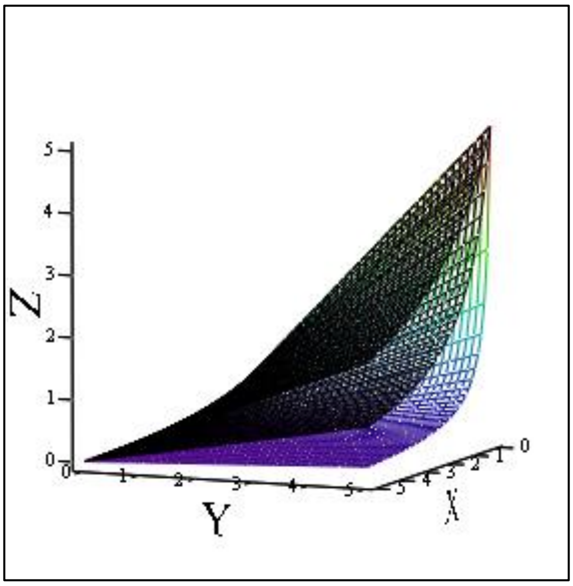
Отсюда находим

$$\ln\left(\frac{uz}{v-1}\right) = \ln C$$

Или подставляя в (24) значения использованных переменных получим уравнение интегральной поверхности

$$\frac{xz}{y-z} = C \qquad (24)$$

На рисунке 2 показан вид поверхности уровня для трех значений постоянной С.



M1, M2, M3

Рисунок 2 - Вид интегральных поверхностей (24), построенных при трех различных значениях константы C = 0.2, 1.0, 3.

Список литературы:

1. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. Едиториал, URSS, 2013, 360 с.

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Изд-во Физико- математической литературы, 1958, 468 с.

3. A.J. Wilkie, "Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential functions", *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), pp. 1051–1094

4. D. H. Delphenich. The role of integrability in a large class of physical systems. Ann. Phys. (Berlin) 18 (2009) 45-56.

UDC 514.83: 514.762.3

SOME FEATURES OF SOLUTIONS TO THE PFAFFIAN EQUATIONS

Anatoly A. Anikiev[1]

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
aaanikiev@mail.ru
Emiliya N. Anikieva[2]
Senior Lecturer
korol_0909@mail.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University
Moscow, Russia
[2]Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Abstract. Approaches to solving the Pfaff equations are presented. Attention is drawn to the geometric interpretation of the equation itself, the conditions for its integration and solutions. Examples of solutions with illustrations are considered.

Keywords: flows, bundles, flow direction vector, plane equation, differential equation.

Статья поступила в редакцию 12.09.2022; одобрена после рецензирования 10.10.2022; принята к публикации 20.10.2022.

The article was submitted 12.09.2022; approved after reviewing 10.10.2022; accepted for publication 20.10.2022.