УДК 514

7-Е ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

Стариков В.Н.

старший преподаватель,

Мичуринский государственный аграрный университет,

г. Мичуринск, Россия. E-mail: vnst@mail.ru

Аннотация. Сообщаются 3 новые теоремы для треугольника и четырехугольника и новые формулы для треугольника.

Ключевые слова: геометрия, теоремы, треугольник, четырехугольник.

Введение. В настоящей работе введено сокращение слова: треугольник=**3-к,** четырехугольник=**4-к**. Также окружность здесь будет обозначаться перечислением в круглых скобках всех точек, через которые она проходит.

Результаты исследований.

Пусть 4-к *ABED* на рис. 1 вписан в окружность (*A,N,B,E,D*) и одновременно полувписан в другую окружность (*A,C,B,G*), т.е. две его смежные вершины *A* и *B*, а также точка *C* пересечения его диагоналей *AE* и *BD* лежит на этой второй окружности (стороны *AD* и *BE* 4-ка на рис. 1 не показаны из-за соображений простоты). Проведем через точку *C* произвольный отрезок прямой *FG*, пересекающий обе окружности в точках *N* и *G*. Сама точка *C* лежит на второй окружности (рис. 1). Пусть противоположные стороны 4-ка *ABED* пересекутся упомянутым отрезком прямой *FG* в некоторых точках *M* и *F*. Тогда можно сформулировать следующую теорему.

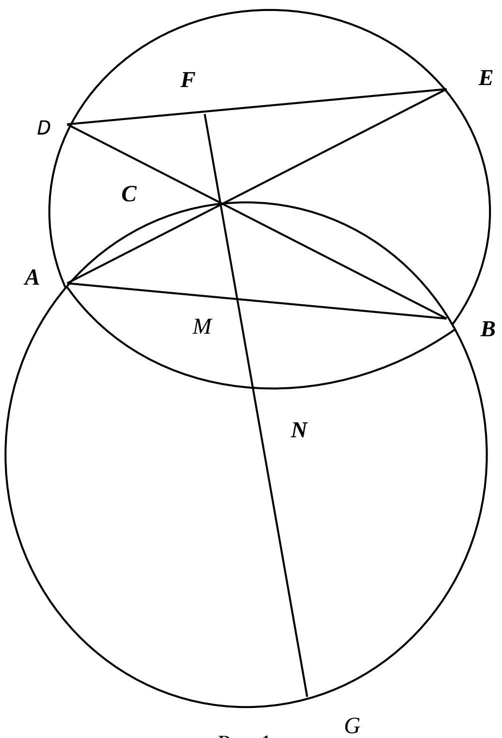

Рис.1

Теорема о секущей противоположных сторон вписанного 4-ка *ABED,* полувписанного в другую окружность. Данная теорема (см. рис. 1) утверждает, что $AC{\cdot}CE=BC{\cdot}CD=GC{\cdot}CF=const$. **Доказательство**. То, что $AC{\cdot}CE=BC{\cdot}CD$, следует из известной формулы для двух хорд одной окружности, пересекающихся внутри нее. Осталось доказать, например, что $BC{\cdot}CD=GC{\cdot}CF$. Для этого докажем, что 3-ки *DCF* и *GBC* подобные. Они действительно подобные, ибо равны углы $\angle DCF=\angle GCB$, как вертикальные углы. Очевидно, равны углы $\angle BGC=\angle BAC$, как углы, вписанные в окружность (*A,C,B,G*) и опирающиеся концами на общую дугу *CB*. Очевидно, равны также углы $\angle BAC=\angle BAE=\angle BDE=\angle CDE=\angle CDF$. Действительно углы

$\angle BAE=\angle BDE$ равны, как углы, вписанные в окружность (A,N,B,E,D) и опирающиеся концами на общую дугу BE. Остальные углы в этой цепочке равенств равны, как углы, отложенные от одних и тех же углов, но имеющие слегка продолженные или укороченные концы. Итак, $\angle BGC=\angle BAC=\angle CDE=\angle CDF$ или $\angle BGC=\angle CDF$, а также $\angle GCB=\angle DCF$. Следовательно, 3-ки DCF и GBC подобные по признаку равенства у них двух пар внутренних углов. Для указанных подобных 3-ков имеем: $\frac{GC}{BC}=\frac{CD}{CF}$ или $GC{\cdot}CF=BC{\cdot}CD$, что и требовалось доказать.

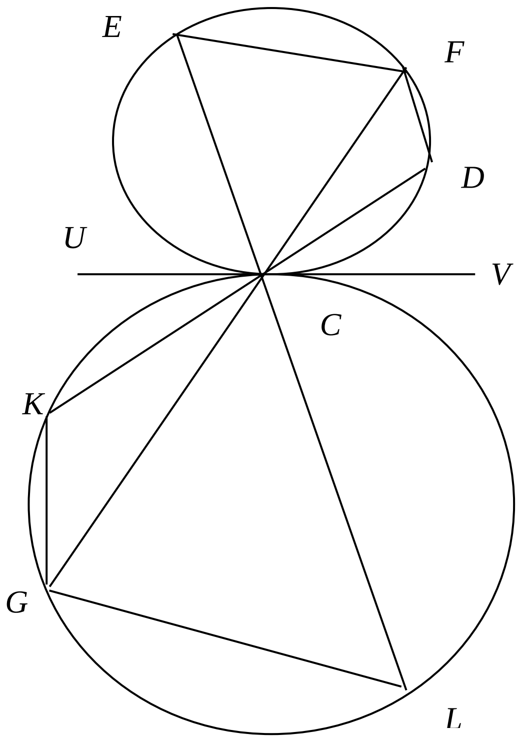

Рис. 2

Частные случаи данной теоремы. Если 4-к $ABED$ – равнобокая трапеция, то она, как известно, всегда может быть вписана в некоторую окружность. Тогда AB и ED – либо две равные боковые стороны такой трапеции, либо два параллельных ее основания. AB и ED –две равные боковые стороны такой трапеции, тогда мы имеем частный случай сформулированной выше теоремы, приведенный в нашей статье «Стариков В.Н. 6-е исследование по геометрии» (см. второй выпуск настоящего журнала) под названием «*теорема о бабочке, полувписанной в окружность*», где утверждение теоремы названо «*правилом ложных секущих (псевдосекущих) окружности»*. Поскольку мы здесь доказали даже более общую теорему, то доказательство частной теоремы больше не требуется.

Теорема о двух парах хорд двух касающихся внешним образом окружностей, пересекающихся в точке касания этих окружностей. Если 3-к ABC на рис. 1 вырождается в точку, то совпадут точки A,B,C и M, а две пересекающиеся окружности станут касательными окружностями. Если обозначить совпавшие точки A,B,C и M, все буквой C, то окружности станут касаться внешним образом в точке *C*. Если через точку *C* провести касательную *UV* к двум окружностям, а также два дополнительных отрезка прямых *LE* и *KD*, то мы получим рис. 2**.** Докажем, что для произвольных отрезков прямых *LE, KD* и *GF*, проходящих через точку *C* касания двух окружностей, всегда выполняется соотношение $\frac{KC}{CD}=\frac{GC}{CF}=\frac{LC}{CE}=const$. **Доказательство.** Докажем например, что на рис. 2 два отрезка прямых *EF* и *GL* параллельны, а 3-ки *EFC* и *GLC* подобны. Действительно у 3-ков *EFC* и *GLC* углы *ECF* и *GCL* равны, как вертикальные, а вписанные в две окружности углы *EFC* и *LGC* измеряются половинами соответственно дуг $^{\cup}EC$ и $^{\cup}LC$ двух окружностей, на которые они опираются [2; с. 14, п. 1.3]. В свою очередь, половины дуг $^{\cup}EC$ и $^{\cup}LC$ являются радианной мерой углов *UCE* и *VCL*, образованных касательной *UV* к двум окружностям и соответствующими хордами *EC* и *LC*. Однако углы *UCE* и *VCL* равны, как вертикальные. Следовательно, равны радианные меры дуг $^{\cup}EC$ и $^{\cup}LC$. Следовательно, равны углы *EFC* и *LGC*. Но они являются равными внутри накрест лежащими углами для отрезков прямых *EF* и *GL*, пересекаемых секущей *EL*. Следовательно, (по признаку параллельности прямых) отрезки прямых *EF* и *GL* параллельны, а 3-ки *EFC* и *GLC* подобны. Из подобия 3-ков *EFC* и *GLC* сразу следует, что $\frac{GC}{CF}=\frac{LC}{CE}$, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что два отрезка прямых *DF* и *GK* параллельны, а 3-ки *DFC* и *GKC* подобны. Следовательно, $\frac{KC}{CD}=\frac{GC}{CF}$. Окончательно имеем $\frac{KC}{CD}=\frac{GC}{CF}=\frac{LC}{CE}=const.$

Теорема о двух парах хорд двух касающихся внутренним образом окружностей, выходящих из точки касания этих окружностей. Если две пары хорд двух касающихся внешним образом окружностей (см. рис. 2) заменить на две пары хорд двух касающихся внутренним образом окружностей, выходящих из точки касания этих окружностей, то мы получим рис. 3. Для него предыдущая теорема запишется в виде: $\frac{GC}{CF}=\frac{LC}{CE}$, а также $\frac{GF}{CF}=\frac{LE}{CE}$. **Доказательство.** На рис. 3 два отрезка прямых *EF* и *GL* антипараллельны отрезку *UV*, являющемуся касательной прямой к двум касающимся внутренним образом окружностям. Следовательно, два отрезка прямых *EF* и *GL* параллельны друг другу. По теореме Фалеса параллельные прямые отсекают от угла пропорциональные отрезки. Следовательно, $\frac{GC}{CF}=\frac{LC}{CE}$, а также $\frac{GF}{CF}=\frac{LE}{CE}$, что и требовалось доказать.

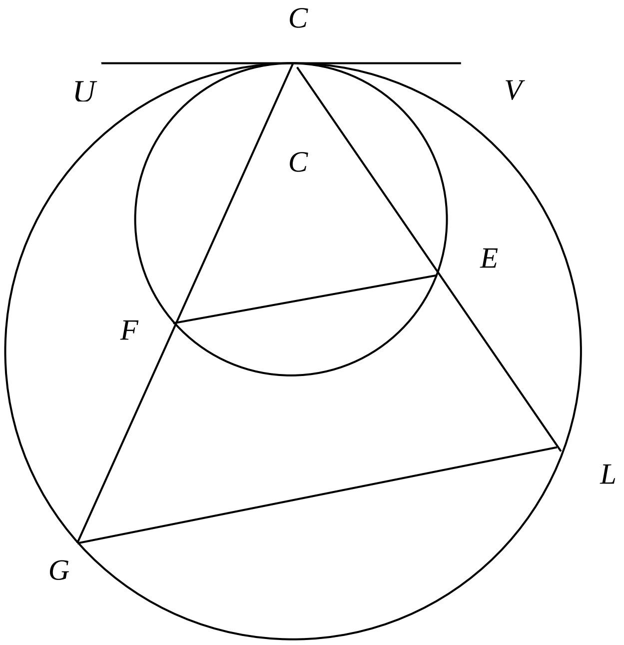

Рис. 3

Некоторые новые тригонометрические формулы для углов 3-ка, не вошедшие в статью *«*Стариков В.Н. 5-е исследование по геометрии» (см. первый выпуск настоящего журнала). Пусть *A, B,* и *C* – внутренние углы 3-ка или радианные меры этих углов, которые связаны формулой $A+B+C=\pi$; *a, b,* и *c* – стороны 3-ка, лежащие против углов соответственно *A, B,* и *C,* $p=(a+b+c)/2$ –полупериметр, *r* и *R* – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей 3-ка (*обода и обруча*). *Теоремы синусов, косинусов и тангенсов* будут обозначаться соответственно *ТС, ТК, ТТ*. *S* - площадь 3-ка. Тогда можно написать следующие *новые тригонометрические формулы для углов 3-ка*:

$\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{C-A}{2}\right)+\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)=0;$ (доказательство этой формулы следует из очевидного тождества $\frac{b-c}{4R}+\frac{c-a}{4R}+\frac{a-b}{4R}=0$, если для трех разностей сторон 3-ка в числителях применить три раза формулу Мольвейде [1, с. 190, формула вида (2.40)] и теорему синусов),

$\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+\cos\frac{B}{2}\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)+\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$ (доказательство этой формулы следует из очевидного тождества $\frac{b+c}{4R}+\frac{c+a}{4R}+\frac{a+b}{4R}=\frac{4p}{4R}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, если для трех сумм сторон 3-ка в числителях применить три раза формулу Мольвейде [1, с. 190, формула вида (2.39)] и теорему синусов).

Используя формулы Мольвейде, теорему синусов и другие, можно получить формулы: $\frac{a^2+b^2-4R^2}{4R^2}=\cos C\cos(A-B)$ (*4 - я ТК*) $\frac{a^2-b^2}{4R^2}=\sin C\sin(A-B)$ (3-*я ТС*).

Произведение и отношение их левых и правых частей дают соответственно: $\frac{(a^2+b^2-4R^2)(a^2-b^2)}{16R^4}=\left(\frac{1}{4}\right)\sin 2C\sin 2(A-B)$ (4-*я ТС- большáя ТС или ТС большúх углов*) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2-4R^2}=tg\ C\ tg\ (A-B)$(3-*я ТТ - большáя ТТ или ТТ большúх углов*), $c^2=a^2\cos 2B+b^2\cos 2A+2ab\cos(B-A)$ $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2-4R^2}=tg\ C\ tg\ (A-B)$(4-*я ТК - большáя ТК или ТК большúх углов*). Другие *ТС, ТК* и *ТТ* введены в статье «Стариков В.Н. 5-е исследование по геометрии» (см. первый выпуск настоящего журнала). *Другие формулы*. $S=r^2\ ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}=2\ R^2\ \sin A\sin B\sin C=\ p^2\ tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$,

$$\frac{r}{R}=\left(\frac{p}{a}-1\right)\left(\frac{p}{b}-1\right)\left(\frac{p}{c}-1\right),\qquad \frac{r}{a}=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},\qquad \frac{p}{a}-1=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

$$\frac{p+r}{a}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin A}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)+1,\qquad \frac{p}{a}=\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},\ \frac{R}{a}=\frac{1}{2\sin A}.$$

$$\frac{a-b}{\mathrm{r}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}};\quad \frac{a+b}{\mathrm{r}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Выводы. По-нашему мнению, рассмотренные вопросы будут полезны геометрам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

2. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. — Т.1: Планиметрия, преобразования плоскости. М.: МЦНМО, 2004. 312 с.

UDC 514

7-TH RESEARCH ON GEOMETRY

Starikov V. N.,
major teacher.
Federal Educational Institution “Michurinsk State Agrarian University”,
Russia,
E-mail: vnst@mail.ru.

Abstract. It is described a 3 new theorems of the triangle, the bilateral and new formulae of the triangle.

Keywords (Docuterm): the geometry, theorems, the triangle, the bilateral.