УДК 517.9

ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Борис Игнатьевич Смагин
доктор экономических наук, профессор
bismagin@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. В данной статье рассмотрены методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, применяемые при описании физических процессов, а также в инженерных, и биологических науках.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, интегральные кривые, параметрическая форма записи, уравнение Лагранжа, уравнение Клеро.

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

Если это уравнение удается разрешить относительно y', то получаем одно или несколько уравнений

$$y' = f_i(x, y) \ \ (i = 1, 2, \ldots).$$

Интегрируя эти, уже разрешенные относительно производной уравнения, найдем решения исходного уравнения (1).

Проинтегрируем, например, уравнение

$$(y')^2 - (x + y) \cdot y' + xy = 0.$$

Разрешая это квадратное уравнение относительно y', будем иметь: y'=x и y'=y. Интегрируя каждое из полученных уравнений, находим:

$$y = \frac{x^2}{2} + c, \ \ y = c \cdot e^x.$$

Однако далеко не всегда уравнение (1) легко разрешается относительно y' и еще реже полученные после разрешения относительно y' уравнения $y' = f_i(x, y)$ легко интегрируются, поэтому часто приходится интегрировать уравнения вида (1) иными методами. Рассмотрим следующие случаи [1,2].

1. Уравнение (1) имеет вид

$$F(y') = 0, \qquad (2)$$

причем существует по крайней мере один действительный корень $y' = k_i$ этого уравнения.

Так как уравнение (2) не содержит x и y, то k_i – постоянное. Следовательно, интегрируя уравнение $y' = k_i$ получим $y = k_i x + c,$ или

$k_i = \dfrac{y-c}{x}$, но k_i является корнем уравнения (2), следовательно, $F\left(\dfrac{y-c}{x}\right)=0$ является интегралом рассматриваемого уравнения.

Пример 1. $(y')^7-(y')^5+y'+3=0.$

Интеграл уравнения

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^7-\left(\frac{y-c}{x}\right)^5+\left(\frac{y-c}{x}\right)+3=0.$$

2. Уравнение (1) имеет вид

$$F(x,y')=0. \qquad (3)$$

Если это уравнение трудно разрешить относительно y', то целесообразно ввести параметр t и заменить уравнение (3) двумя уравнениями: x = φ(t) и y' = ψ(t). Так как dy = y'dx, то в данном случае dy = ψ(t)·φ'(t)dt, откуда $y=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt+c$ и, следовательно, интегральные кривые уравнения (3) определяются в параметрической форме следующими уравнениями:

$$x=\varphi(t), \quad y=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt+c.$$

Если уравнение (3) легко разрешимо относительно x, x = φ(y'), то почти всегда удобно в качестве параметра ввести y' = t. Тогда

$$x=\varphi(t),\ dy=y'dx=t\cdot\varphi'(t)\,dt,\ y=\int t\cdot\varphi'(t)\,dt+c.$$

Пример 2. $x=(y')^3-y'-1.$

Положим y' = t. Тогда

$$x=t^3-t-1, \qquad (4)$$

$$dy=y'dx=t\left(3t^2-1\right)dt,$$

$$y=\frac{3t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+c_1. \qquad (5)$$

Уравнения (4) и (5) определяют в параметрической форме семейство искомых интегральных кривых.

Пример 3. $x \cdot \sqrt{1+y'^2} = y'$.

Полагаем $y' = tgt, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2};$ тогда

$$x = \sin t, \qquad (6)$$

$$dy = y'dx = tgt \cdot \cos t dt = \sin t dt,$$

$$y = -\cos t + c_1. \qquad (7)$$

или, исключая t из уравнений (6) и (7), получим $x^2 + (y - c_1)^2 = 1$ – семейство окружностей.

3. Уравнение (1) имеет вид

$$F(y, y') = 0. \qquad (8)$$

Если это уравнение трудно разрешить относительно y', то, как и в предыдущем случае, целесообразно ввести параметр t и заменить уравнение (8) двумя уравнениями: y = φ(t) и y' = ψ(t). Так как dy = y'dx, то

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} \Rightarrow x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c.$$

Следовательно, искомые интегральные кривые в параметрической форме определяются уравнениями

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c, \ \ y = \varphi(t).$$

В частности, если уравнение (8) легко разрешимо относительно y, то обычно за параметр удобно взять y'.

Действительно, если $y = \varphi(y')$, то, полагая $y' = t$, получим

$$y = \varphi(t), dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{t}, \ \ x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{t} + c.$$

Пример 4. $y=(y')^5+(y')^3+y'+5.$

Положим y' = t. Тогда

$$y=t^5+t^3+t+5, \qquad (9)$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{(5t^4+3t^2+1)dt}{t}=\left(5t^3+3t+\frac{1}{t}\right)dt,$$

$$x=\frac{5t^4}{4}+\frac{3t^2}{2}+\ln|t|+c. \qquad (10)$$

Уравнения (9) и (10) являются параметрическими уравнениями семейства интегральных кривых.

Пример 5. $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=1.$

Полагаем $y'=sh\,t,$ тогда

$$y=ch\,t, \qquad (11)$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{sh\,tdt}{sh\,t}=dt,$$

$$x=t+c. \qquad (12)$$

или, исключая из (11) и (12) параметр t, получаем $y=ch(x-c).$

4. Рассмотрим теперь общий случай: левая часть уравнения

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

зависит от всех трех аргументов x, y, y'. Заменим уравнение (1) его параметрическим представлением:

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ y'=\chi(u,v).$$

Пользуясь зависимостью dy = y'dx, будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\chi(u,v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right],$$

откуда, разрешая относительно производной $\frac{dv}{du}$, получим

$$\frac{dv}{du}=\frac{\chi(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v}-\chi(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}} \qquad (13)$$

В результате получено уравнение первого порядка уже разрешенное относительно производной, и тем самым задача сведена к уже рассмотренным случаям, однако, полученное уравнение (13) не всегда будет интегрироваться в квадратурах.

Если уравнение

$$F(x,y,y')=0$$

легко разрешимо относительно y, то за параметры u и v часто удобно брать x и y'. Действительно, если уравнение (1) приводится к виду

$$y=f(x,y'), \qquad (14)$$

то, считая x и y' = p параметрами, получим

$$y=f(x,p),\, dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}. \qquad (15)$$

Интегрируя уравнение (15), получим Φ(x, p, c) = 0. Совокупность уравнений Φ(x, p, c) = 0 и y = f(x, p), где p – параметр, определяет семейство интегральных кривых.

Заметим, что уравнение (15) может быть получено дифференцированием уравнения (14) по x. Действительно, дифференцируя (14) по x и полагая y' = p, получим $\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}$, что совпадает с (15). Поэтому этот метод часто называют интегрированием дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования.

Совершенно аналогично часто интегрируется уравнение

$$F\left(x, y, y'\right) = 0,$$

если оно легко разрешимо относительно x:

$$x = f\left(y, y'\right). \qquad (16)$$

В этом случае взяв за параметры y и y' = p и пользуясь зависимостью dy = y'dx, получим

$$dy = p\left[\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp\right]$$

или

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}. \qquad (17)$$

Интегрируя уравнение (15), получим Ф(y, p, c) = 0. Это уравнение, совместно с x = f(y, p) определяет интегральные кривые исходного уравнения. Уравнение (17) может быть получено из уравнения (16) дифференцированием по y.

В качестве примера применения этого метода рассмотрим линейное относительно x и y уравнение

$$y = x \cdot \varphi\left(y'\right) + \psi\left(y'\right),$$

называемое уравнением Лагранжа. Дифференцируя по x и полагая y' = p, получим

$$p = \varphi\left(p\right) + x \cdot \varphi'\left(p\right)\frac{dp}{dx} + \psi'\left(p\right)\frac{dp}{dx}, \qquad (18)$$

или

$$\left[p - \varphi\left(p\right)\right]\frac{dx}{dp} = x\varphi'\left(p\right) + \psi'\left(p\right). \qquad (19)$$

Это уравнение линейно относительно x и $\frac{dx}{dp}$ и, следовательно, легко интегрируется, например, методом вариации постоянной. Получив интеграл Ф(x, p, c) = 0 уравнения (19) и присоединяя к нему $y = x\varphi(p)+\psi(p)$, получим уравнения, определяющие искомые интегральные кривые.

При переходе от уравнения (18) к уравнению (19) пришлось делить на $\frac{dx}{dp}$. Но при этом мы потеряем решения, если они существуют, для которых p постоянно, а значит $\frac{dx}{dp}\equiv 0.$ Считая p постоянным, замечаем, что уравнение (18) удовлетворяется лишь в том случае, если p является корнем уравнения p – φ(p) = 0.

Итак, если уравнение p – φ(p) = 0 имеет действительные корни $p = p_i$, то к найденным выше решениям уравнения Лагранжа надо еще добавить $y = x\varphi(p)+\psi(p),\ p = p_i$, или, исключая p $y = x\varphi(p_i)+\psi(p_i)-$ прямые линии.

Отдельно надо рассмотреть случай когда p – φ(p) ≡ 0, и следовательно, при делении на $\frac{dp}{dx}$ теряется решение p = c, где c – произвольная постоянная. В этом случае $\varphi(y')\equiv y'$ и уравнение $y = x\cdot\varphi(y')+\psi(y')$ принимает вид

$$y = xy'+\psi(y') - \text{ уравнение Клеро}$$

Полагая $y' = p$, получим $y = xp+\psi(p)$. Дифференцируя по x, будем иметь

$$p = p + x\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \left(x+\psi'(p)\right)\frac{dp}{dx}=0,$$

откуда или $\frac{dp}{dx}=0$ и, значит, p = c, или $x+\psi'(p)=0.$

В первом случае, исключая p, получим

$$y = cx + \psi(c) \qquad (20)$$

– однопараметрическое семейство интегральных прямых. Во втором случае решение определяется уравнениями

$$y = xp + \psi(p), \;\; x + \psi'(p) = 0 \qquad (21)$$

Нетрудно проверить, что интегральная кривая, определяемая уравнениями (21), является огибающей семейства интегральных прямых (20).

Пример 6. $y = xy' - y'^2 -$ уравнение Клеро.

Однопараметрическое семейство интегральных прямых имеет вид $y = cx - c^2.$ Кроме того, интегральной кривой является огибающая этого семейства, определяемая уравнениями $y = cx - c^2, \; x - 2c = 0.$ Исключая c, получаем $y = \dfrac{x^2}{4}.$

Пример 7. $y = 2xy' - y'^3 -$ уравнение Лагранжа.

$$y' = p,$$
$$y = 2xp - p^3. \qquad (22)$$

Дифференцируя, получаем

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 3p^2\frac{dp}{dx} \qquad (23)$$

и после деления на $\dfrac{dp}{dx}$ приходим к уравнению

$$p\frac{dx}{dp} = -2x + 3p^2.$$

Интегрируя это линейное уравнение, получаем $x = \frac{c_1}{p^2} + \frac{3}{4} p^2$. Следовательно, интегральные кривые определяются уравнениями $y = 2xp - p^3,\ x = \frac{c_1}{p^2} + \frac{3p^2}{4}$.

При делении на $\frac{dp}{dx}$, как указывалось выше, теряются решения $p = p_i$, где p_i – корни уравнения p – φ(p) = 0. В данном случае теряется решение p = 0 уравнения (23), которому в силу уравнения (22), соответствует решение исходного уравнения y = 0.

Список литературы:

1. Демидович Б.П. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов, 5-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2021. 280с.

2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие. Изд. 3-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 240с

UDC 517.9

THE SIMPLEST TYPES OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS UNRESOLVED WITH RESPECT TO THE DERIVATIVE

Boris I. Smagin
Doctor of Economics, Professor
bismagin@mail.ru
Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Annotation. This article discusses methods for solving ordinary differential equations unresolved with respect to the derivative, used in the description of physical processes, as well as in engineering and biological sciences.

Key words: differential equation, integral curves, parametric form of notation, Lagrange equation, Clerault equation.

Статья поступила в редакцию 05.11.2021; одобрена после рецензирования 01.12.2021; принята к публикации 20.12.2021.

The article was submitted 05.11.2021; approved after reviewing 01.12.2021; accepted for publication 20.12.2021.