УДК 514

15-Е ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

Стариков В.Н.

старший преподаватель,

Мичуринский государственный аграрный университет,

г. Мичуринск, Россия.

E-mail: vnst@mail.ru

Аннотация. Сообщаются новые результаты для треугольника и четырехугольника

Ключевые слова: геометрия, треугольник, четырехугольник.

Введение. В настоящей работе введено сокращение слова: треугольник=**3-к,** четырехугольник=**4-к**. Окружности здесь будут обозначаться перечислением в круглых скобках латинскими буквами всех точек, через которые они проходят. Перпендикулярные радиусы к касательным окружностей ука-

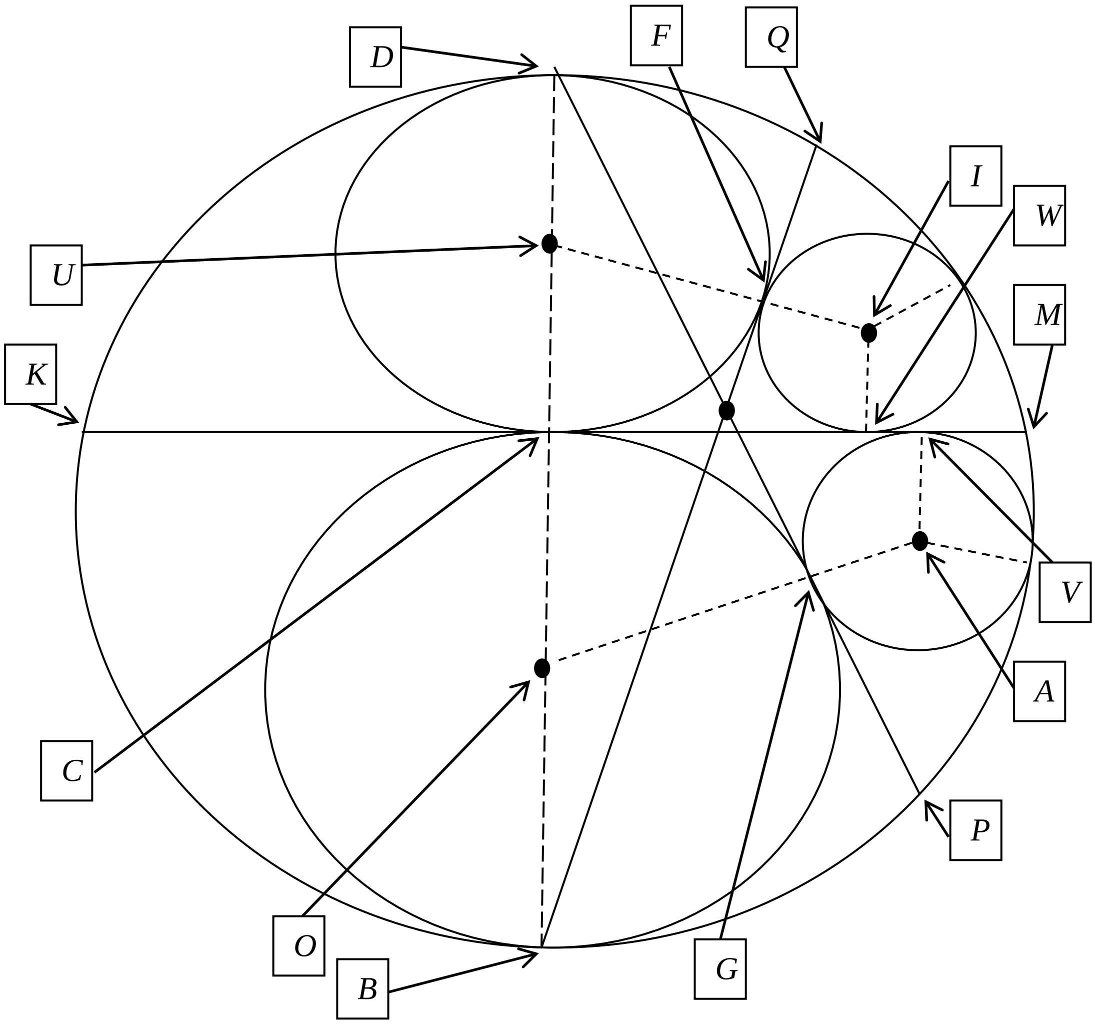

Рис. 1

заны пунктирными линиями. Центры окружностей указаны черными кружками и обозначены заглавными гласными латинскими буквами: *A*, *O*, *U*, *I*. На рис. 2 уголками отмечены прямые углы.

В Древней Греции плоскую фигуру (рис. 1), образованную из полукруга (*D, Q,M,P, B,O,U)*) вырезанием двух полукругов (*D,F,C,U*) и (*C,G,B,O*), называли *арбелосом* (из-за ее сходства с сапожным ножом того времени). Существует известная **задача Архимеда** *про арбелос*. Доказать, что если в описанном выше на рис. 1 *арбелосе* провести перпендикулярно радиусам касательную *CM* в точке *C* касания окружностей (*D,F,C*) и (*C,G,B*), а в полученные две луночки

(*D,Q,M,V,W, C, F*) и (*C, W, V, M, P, B, G*) вписать две окружности (*W, F*) и (*V, G*) соответственно радиусов *IF=I W =x* и *AG=AV =y*, то их радиусы всегда будут равны (то есть *x =y*) и этот результат (результат равенства двух радиусов) не будет зависеть от значений радиусов основных окружностей *арбелоса*, которые мы обозначим через *UD=UF =UC =R* и *OC =OG =OB =r*.

О доказательствах основного результата задачи Архимеда про *арбелос.* Известно доказательство основного результата задачи Архимеда про *арбелос*: *x =y* в брошюре Жижилкина И. Д. (см. [1; С. 23-24, рис. 24]). Оно использует преобразование инверсии относительно окружности. Это доказательство нельзя считать простым (элементарным), ибо само по себе преобразование инверсии не является простым.

Ниже дано простое доказательство **основного результата задачи Архимеда про *арбелос,*** которое можно назвать «*использованием новых идей для старой проблемы*». В нашем исследовании по геометрии (см. [2]) мы, используя *теорему Кейси,* доказали следующую теорему (цитируется фрагмент из статьи «9–е исследовании по геометрии»):

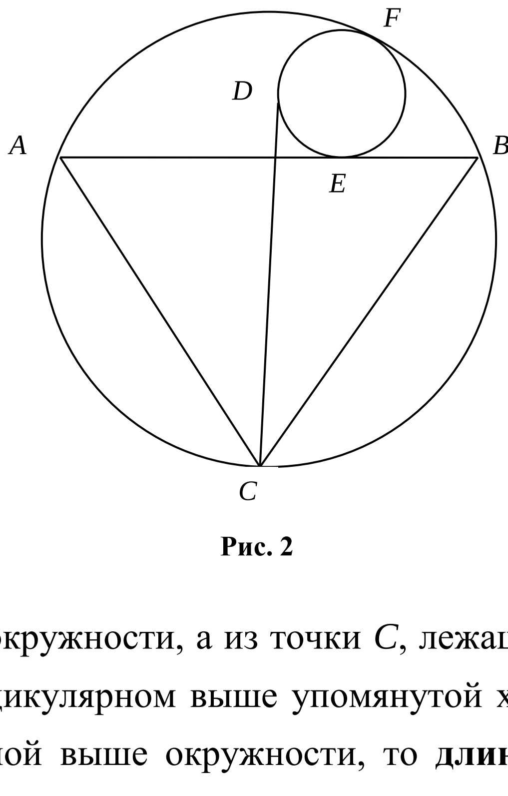

Рис. 2

«Если на **рис. 2** внутри произвольной большой окружности (*A,C,B,F*) хордой *A, B* отсечь круговой сегмент (*A,E,B,F*) *меньше половины* **(**условие «*меньше половины»* здесь излишне, ибо в доказательстве оно никак не используется**)** этой окружности и в полученный сегмент *вписать* произвольную малую окружность (*D,E, F*) **любого диаметра** так, чтобы она **касалась** в одной точке *E* хорды, *AB*, а в другой точке *F* касалась внутренним образом этой большой окружности, а из точки *C*, лежащей на диаметре большой окружности, перпендикулярном выше упомянутой хорде *AB*, провести касательную *CD*. к указанной выше окружности, то **длина этой касательной *CD* будет постоянна и равна** *AC* и *CB*. Т. е. 2-ой конец *D* этой касательной *CD* **всегда будет лежать на окружности** с центром в точке *C* радиусом *AC*. Т. е. в данном случае *CD*= *AC*=*CB*». То есть *радикальным центром* бесконечного семейства произвольных окружностей типа (*D,E, F*), вписанных в круговой сегмент (*A,E,B,F*) является точка *C*, лежащая на пересечении срединного перпендикуляра *CD* (являющегося осью симметрии на рис. 2) с окружностью (*A, C, B,F*).

Из последней теоремы, примененной к рис. 1, следует, что все касательные к двум окружностям (*D,F,C*) и (*W, F*), вписанные в один и тот же круговой сегмент (*K,DQ,V,W,C*), *имеют одинаковую длину и проходят через одну точку B*, а все касательные к двум окружностям (*C,G,B*),и (*V, G*), вписанные в один и тот же круговой сегмент (*K, B,P,M, V,W,C*), *имеют одинаковую длину и проходят через одну точку D*. Поскольку с одного бока (с одной стороны) из одной точки к окружности нельзя провести более одной касательной, то отсюда следует, что касательная *FB* в точке *F* касания двух окружностей (*D,F,C*) и (*W, F*) пройдет через точку *B*, в то время как касательная *GD* в точке *G* касания двух окружностей *C,G,B*),и (*V, G*) пройдет через точку *D*. Это приводит нас к рис. 3, где без изменения обозначений воспроизведены основные детали рис. 1.

Теперь задача состоит в доказательстве на рис. 3 того, что, если в прямоугольной трапеции *UCIW* ($UC \| IW$) $UF=UC=R$ и в прямоугольной трапеции *OCAV* ($OC \| AV$) $OC=OG=r$, то при условии, что $IF=IW=x$, и при условии, что $AG=AV=y$, всегда оказывается $x=y$. На рис. 3 равны две пары углов: $\angle BDG = \angle CYO$, $\angle DBF = \angle UXC$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами ($BD \perp CY$, $DG \perp YO$, $DB \perp XC$, $BF \perp UX$). Проведем два параллельных отрезка прямых: $NI \| CX$ и $ZA \| CX$, откуда $NI \| ZA$. Из подобных прямоугольных 3-ков *OAZ* и *ODG* имеем $\sin(\angle OAZ)=\frac{OZ}{OA} = \frac{R-y}{R+y} = \sin(\angle ODG) = \frac{OG}{OD} = \frac{R}{R+2r}$. Аналогичным образом из подобных прямоугольных 3-ков *UIN* и *UBF* имеем $\sin(\angle UIN)=\frac{UN}{UI} = \frac{r-x}{r+x} = \sin(\angle UBF) = \frac{UF}{UB} = \frac{r}{r+2R}$. Имеем систему из 2 уравнений с 2 неизвестными: $\frac{R-y}{R+y} = \frac{R}{R+2r}$ и $\frac{r-x}{r+x} = \frac{r}{r+2R}$. Из 1-го уравнения имеем $\frac{R-y}{R+y} = \frac{R}{R+2r} = \frac{(R+2r)-2r}{R+2r} = 1 - \frac{2r}{R+2r}$. Из 2-го уравнения имеем $\frac{r-x}{r+x} = \frac{r}{r+2R} = \frac{(r+2R)-2R}{r+2R} = 1 - \frac{2R}{r+2R}$. Вводя обозначения: $a=\frac{R}{R+2r}$, $b=\frac{2r}{R+2r}$, имеем систему из 2 уравнений: $R-y=(1-a)(R+y)$ и $r-x=(1-b)(r+x)$, эквивалентную другой системе из 2 уравнений: (R+y)-2y=(1-a)(R+y) и (r+x)-2x=(1-b)(r+x). Последнюю систему преобразуем в другую эквивалентную систему:-2y=(-a)(R+y) и -2x=(-b)(r+x). Раскрывая скобки в правых частях последней системы и приводя подобные, имеем систему: $y=\frac{Ra}{2-a}$ и $x=\frac{rb}{2-b}$. Подставляя использованные выше обозначения для a и b, окончательно имеем $y=\frac{rR}{R+r}=x$. Таким образом, y=x, что и требовалось доказать.

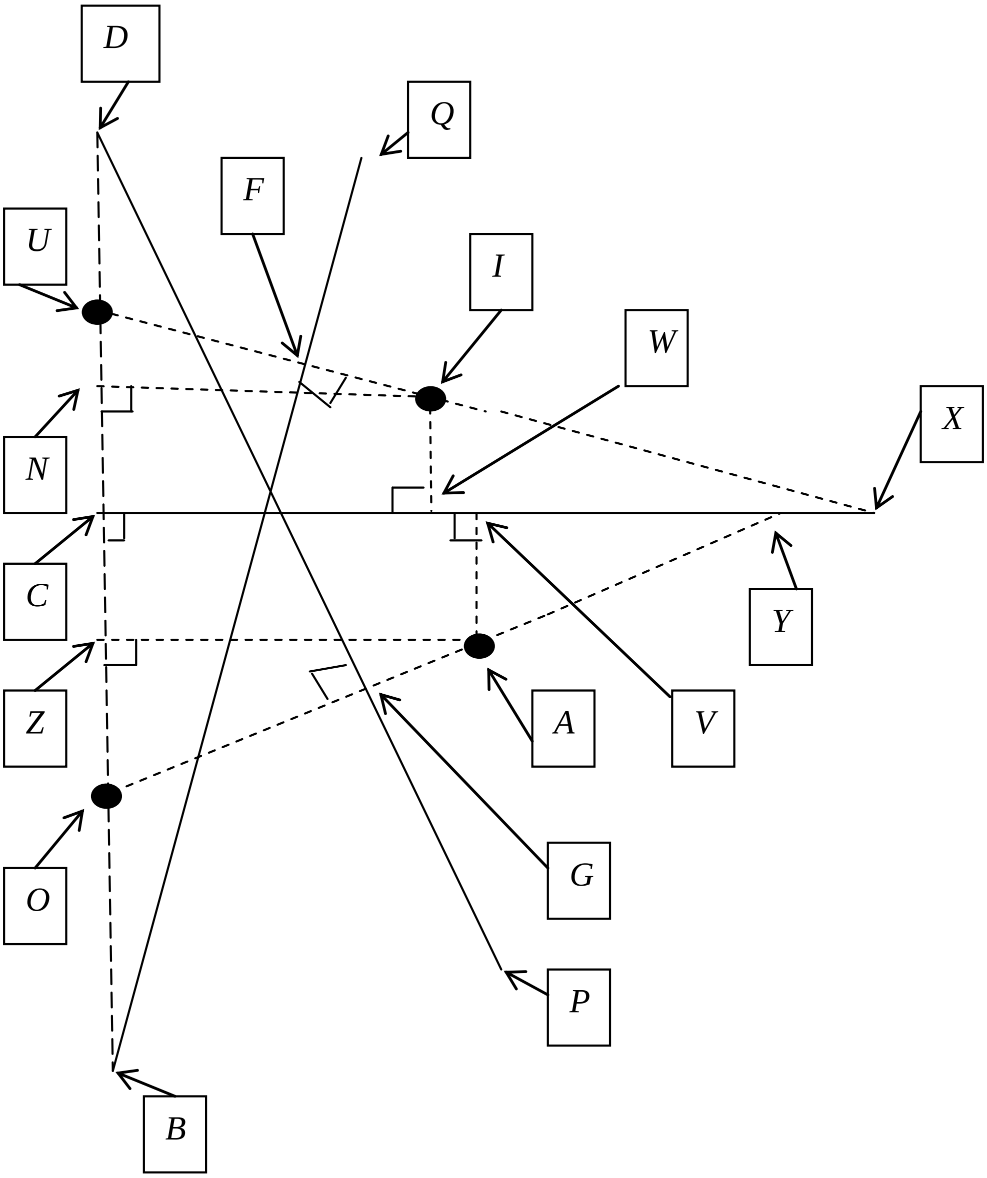

Рис. 3

Выводы. По-нашему мнению, рассмотренные вопросы будут полезны геометрам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жижилкин И. Д. Инверсия. М.: МЦНМО, 2009. 72 с.
2. Стариков В.Н. 9-е исследование по геометрии// Научный рецензируемый электронный журнал МГАУ "Наука и образование". 2020. № 1. 7 с.// http://opusmgau.ru/index.php/see/issue/ view/1603

UDC 514

15-TH RESEARCH ON GEOMETRY

Starikov V. N.,

major teacher.

Federal Educational Institution “Michurinsk State Agrarian University”,

Russia,

E-mail: vnst@mail.ru.

Abstract. It is described a new results of the triangle, the bilateral.

Keywords (Docuterm): the geometry, the triangle, the bilateral.