УДК 514

14-Е ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

Стариков В.Н.

старший преподаватель,

Мичуринский государственный аграрный университет,

г. Мичуринск, Россия.

E-mail: vnst@mail.ru

Аннотация. Сообщаются новые результаты для треугольника и четырехугольника

Ключевые слова: геометрия, треугольник, четырехугольник.

Введение. В настоящей работе введено сокращение слова: треугольник=**3-к,** четырехугольник=**4-к**. Также окружность здесь будет обозначаться перечислением в круглых скобках всех точек, через которые она проходит.

Пусть *A, B,* и *C* – внутренние углы 3-ка или радианные меры этих углов, которые связаны формулой $A+B+C=\pi$. Пусть *a, b,* и *c* – стороны 3-ка, лежащие против углов соответственно *A, B,* и *C, R* и *r* – радиус описанной и вписанной окружностей, ρ – радиус вневписанной окружности, *S* - площадь 3-ка, *p* – полупериметр 3-ка *ABC*. Окружности задаются точками в скобках, через которые они проходят.

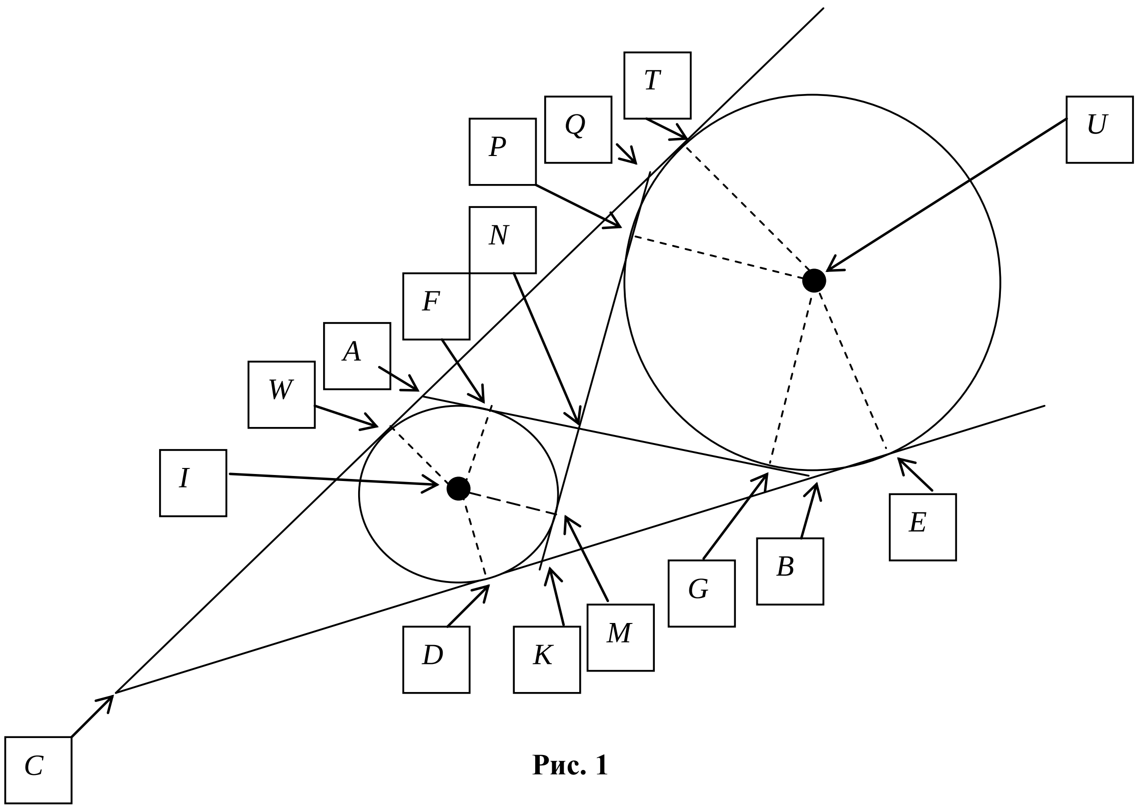

Рис. 1

Результаты исследований.

Теоремы о касательных вписанной окружности (о Луне) и вневписанной окружности (о Солнце) (рис. 1) 3-ка наблюдения *ABC.* Пусть даны 2 окружности *3-ка наблюдения ABC* и равного ему 3-ка *KQC*, образованных на пересечении равных пар касательных двух окружностей: **1)** вписанной окружности

(*D*,*M*,*F*,*W*) с центром *I*, которую мы назовем *Луной* и 2**)** вневписанной окружности **(***G*,*E*,*T*,*P*) с центром *U*, которую мы назовем *Солнцем*. К этим окружностям проведены следующие пары равных касательных: 1) *внешние (длинные)* касательные *DE*=*WT*, 2) *внутренние (короткие)* касательные *FG*=*MP*. Из центров *I* и *U* этих окружностей в 8 точках касания к этим касательным проведены 8 перпендикулярных им радиусов окружностей *r*= *ID*=*IM* =*IF IW* и ρ=*UG* =*UE* =*UT* =*UP*.

Пусть *BC*=*a*, *CA*=*b*, и *BA*= *c* – стороны 3-ка наблюдения *ABC*, а его углы равны α= ∠*BAC*, β= ∠*ABC*, γ = ∠*BCA*. Угол α= ∠*BAC* есть угол бокового зрения *Солнца* при ее затмении *Луной* (угол затмения). Угол ∠*ABE*=π-∠*ABC*= π-β назовем углом бокового зрения *Солнца* при его наблюдении из космоса в плоскости, проходящей сразу через два центра *I* и *U* Луны и Солнца. Из космоса в указанной выше плоскости имеются два равных между собой наибольших угла бокового зрения *Солнца* и *Луны*: Это – углы ∠*ANK*= ∠*BNQ* между *внутренними (короткими)* касательными *FG*=*MP*, равные как вертикальные углы плоскости.

Тогда легко доказываемы следующие **теоремы о касательных:**

1) $DE=WT=(EU-DI)\cdot ctg\left(\dfrac{\angle TCE}{2}\right)=(\rho-r)\cdot ctg\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)=c=AB=KQ$. Последняя формула составляет **1-ю теорему о касательных**:. Ее словесная формулировка такова: **длины *внешних (длинных)* касательных** *DE* и *WT*, **проведенных к внешне касающимся окружностям (***D*,*M*,*F*,*W*) и **(***G*,*E*,*T*,*P*), **равны между собой и равны двум продолженным отрезкам *внутренних (коротких)* касательных** *AB* и *KQ*, **заключенным между упомянутыми выше *внешними (длинными)* касательными** *DE* и *WT*.

2) Легко доказать, что на рис. 1 **равны следующие восьмерки фрагментов *внутренних и внешних* касательных:** *DK*=*KM*=*PQ*=*QT*=*WA*=*AF*=*GB*=*BE*. Последняя формула составляет **2-ю теорему о касательных**: Доказательство того, что, например, *AF*=*GB*, может быть проведено с использованием тригонометрических функций углов в 3-ке *ABC* и выражений для радиусов *r* и *ρ*– вписанной и вневписанной окружностей (так называемые *теоремы котангенсов*, выражающие r и ρ через полупериметр 3-ка *ABC*).

3) 3-я теорема о касательных утверждает: *FG*=*MP*=*KB*=*AQ*. Последняя формула составляет **3-ю теорему о касательных**:. Ее словесная формулировка такова: **длины *внутренних (коротких)* касательных** *FG*=*MP*, **проведенных к внешне касающимся окружностям (***D*,*M*,*F*,*W*) и **(***G*,*E*,*T*,*P*), **равны между собой и равны двум *внешним (длинным)* касательным отрезкам** *KB* и *AQ* **прямых, заключенным между упомянутыми выше *внутренними (короткими)* касательными, то есть** *FG*=*MP*=*KB*=*AQ*.

Доказательство. $FG=MP=AB\text{-}AF\text{-}GB=DE\text{-}AF\text{-}GB = DE\text{-}2\cdot AF= DE\text{-}2\cdot BE= DE\text{-}DK\text{-}BE= KB$. Итак, *FG*=*MP*=*KB*=*AQ*, что и требовалось доказать. Здесь использовалась **2-я теорема о касательных.** В частности, 3-я теорема о касательных утверждает: *FG*= *KB*, то есть в 4-ке *KBGF*, выродившемся в 3-к *KBF*, равны 2 пару противоположных сторон: *FG*= *KB*.

Заметим, что рис. 1 симметричен относительно прямой *CU*, проходящей через точку *I*, являющуюся биссектрисой угла $\angle TCE=\gamma$.

Доказательство *формулы Молвейде* через радиусы вписанной и вневписанной окружностей. 3-ка *ABC*. Прямая *CU* - биссектриса угла $\angle TCE=\gamma$. Поэтому $\angle TCU=\angle UCE=\gamma/2$. Из наших предыдущих исследований известно, что $\angle UIF=\angle IUG=\left|\frac{\beta-\alpha}{2}\right|$. Последний угол есть угол между биссектрисой и высотой остроугольного 3-ка *ABC*, опущенных из вершины *C* на сторону *AB*. Действительно, отрезки *IF* и *UG* параллельны высоте 3-ка *ABC*, опущенной из вершины *C* на сторону *AB*, поэтому параллельны между собой, отрезок *CU* есть биссектриса угла $\angle TCE$. Далее имеем $UI=(FI+GU)\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}=\dfrac{\rho+r}{\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}$. С другой стороны, $UI=(UE\text{-}ID)\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\angle UCE}{2}\right)}=\dfrac{\rho-r}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$. Итак, $UI=\dfrac{\rho+r}{\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}=\dfrac{\rho-r}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$. По теореме котангенсов $r\cdot ctg\left(\frac{\gamma}{2}\right)=p-c$, где *p* – полупериметр 3-ка *ABC*. Из прямоугольного 3-ка *UCE* имеем *CE*= *UE*·ctg(∠*UCE*)= $\rho\cdot ctg\left(\frac{\gamma}{2}\right)=p$, где *p* – полупериметр 3-ка *ABC*. $p=\frac{a=b+c}{2}$. Из последних формул имеем $(\rho-r)ctg\left(\frac{\gamma}{2}\right)=c$ =*AB*.

С учетом 3 последних формул имеем $\frac{a+b}{c}=\frac{\rho+r}{\rho-r}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. При выводе последней формулы мы также воспользовались формулой Молвейде: $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. Из формулы *UI*=$\frac{\rho+r}{\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}=\frac{\rho-r}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$. выведенной выше, также следует тоже самое $\frac{\rho+r}{\rho-r}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. Последний результат можно считать доказательством *формулы Молвейде* через радиусы вписанной и вневписанной окружностей. 3-ка *ABC*.

Доказательство 2-ой теоремы о касательных. Теперь докажем, что *AF*=*GB* и завершим доказательство 2-ой теоремы о касательных. *AF*=*IF*·ctg(∠*IAF*)= $r\cdot ctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; *GB*=*UG*·ctg(∠*GBU*)= $=\rho\cdot ctg\left(\frac{\angle ABE}{2}\right)=\rho\cdot ctg\left(\frac{\pi-\angle ABC}{2}\right)=\rho\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=\rho\cdot tg\left(\frac{\beta}{2}\right)$.Если *AF*=*GB*, то $\rho\cdot tg\left(\frac{\beta}{2}\right)=r\cdot ctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ или $\frac{r}{\rho}=\cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot tg\left(\frac{\beta}{2}\right)$. Деля левые и правые части полученных выше теорем котангенсов $r\cdot ctg\left(\frac{\gamma}{2}\right)=p-c$ и $\rho\cdot ctg\left(\frac{\gamma}{2}\right)=p$, имеем

$$\frac{r}{\rho}=\frac{p-c}{p}=1-\frac{c}{p}=1-\frac{2R\cdot\sin\gamma}{4R\ \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=1-\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\frac{\gamma}{2}\right]=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi-\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\frac{\gamma}{2}\right]=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\frac{\gamma}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\frac{\gamma}{2}\right]=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]=$$

$=\dfrac{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=tg\,\frac{\alpha}{2}\,tg\,\frac{\beta}{2}$.Итак, $\frac{r}{\rho}=tg\,\frac{\alpha}{2}\,tg\,\frac{\beta}{2}$, что и требовалось доказать. При доказательстве использовались: 1) теорема синусов $c= 2R\cdot\sin\gamma$, 2) известная в справочнике формула $p= 4R\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Замечание. Уже после того, как получено написанное выше доказательство, мы нашли очень простое доказательство 2-ой теоремы о касательных. Вот оно.

Т. к. *KP=KE* и *BF=BD*, как пары равных касательных, проведенных к окружности из одной точки соответственно *K* и *B*. Кроме того, *NF=NM* и *NP =NG*, как пары равных касательных, проведенных из одной точки к 2 окружностям. , как пары равных касательных, проведенных к окружности из одной точки *N*. Имеем *KP=KE= KB+BE*, *BF=BD= KB+DK*, *KB=KE-BE=DB-DK=FB – DK*, *KP – BE=FB-DK* или *KP + DK =FB+BE=*(*KM+MD*)*+DK=*(*BG+GF*)*+ BE*. Т. к. *GF=MP*, то *KM+ DK= BG+BE*. Однако *KM=DK* и *BG=BE*. Поэтому 2 ·*KM*=2 ·*DK*= 2 ·*BG* =2 ·*BE*. Однако, в силу симметрии рис, 1 и в силу симметрии расположения касательных к окружностям, *WA=AF =DK =KM*. Следовательно, *KM= DK=BG=BE=WA=AF=QT = PQ*, что и требовалось доказать. Формулы доказаны простым способом без использования тригонометрии.

Замечание. 4-к *DETW* равнобокая трапеция, *DE=TW*, $DW\parallel TE$. Основания *DW* и *TE* – видимые толщина *Луны* и *Солнца*, наблюдаемые из угла затмения $\angle ECT$. Средняя линия *l* трапеции проходит через середины боковых сторон *DE* и *TW* трапеции *DETW* и совпадает со средней линией 2-ой равнобокой трапеции

KBQA (*KB*=*QA*, *KA*||*BQ*.), ибо *DK*= *BE*= *QT* =*WA*. Ее длина *m*(*l*)=(*DW*+*TE*)/2, хотя средняя линия 2-ой трапеции короче и равна (*KA*+*BQ*)/2. Указанная средняя линия является *радикадьной осью* двух окружностей (*Луны* и *Солнца*), т. е. длины всех 4 касательных из любой точки *радикадьной оси* до *Луны* и до *Солнца* равны между собой.

Выводы. По-нашему мнению, рассмотренные вопросы будут полезны геометрам.

UDC 514

14-TH RESEARCH ON GEOMETRY

Starikov V. N.,
major teacher.
Michurinsk State Agrarian University,
Michurinsk, Russia,
E-mail: vnst@mail.ru.

Abstract. It is described a new results of the triangle, the bilateral.

Keywords (Docuterm): the geometry, the triangle, the bilateral.