**УДК 514**

# 12-Е ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

**Стариков Владимир Николаевич**
старший преподаватель,
Мичуринский государственный аграрный университет,
г. Мичуринск, Россия.
E-mail: vnst@mail.ru

**Аннотация.** Сообщаются новые результаты для треугольника и четырехугольника

**Ключевые слова**: геометрия, треугольник, четырехугольник.

**Введение.** В настоящей работе введено сокращение слова: треугольник=**3-к,** четырехугольник=**4-к**. Также окружность здесь будет обозначаться перечислением в круглых скобках всех точек, через которые она проходит.

Пусть *A, B,* и *C* – внутренние углы 3-ка или радианные меры этих углов, которые связаны формулой $A+B+C=\pi$. Пусть *a, b,* и *c* – стороны 3-ка, лежащие против углов соответственно *A, B,* и *C, R* – радиус описанной окружности, *S* - площадь 3-ка.

**Результаты исследований.**

**Лингвистические исследования.** Окружность, как граница круга, слишком длинный термин, выбранный, как нарочно, самым длинным среди однокоренных слов близкого значения: окружение, округа, округ. Поэтому разумно вместо него использовать сокращения: «*о-сть*» и даже «*ость*», имеющем другой смысл. Вместо термина «*вписанная окружность*» лучше использовать термин «*обод*» (*felloe, rim*), Вместо термина *описанную окружность* лучше использовать термин «*обруч*» (*hoop*). Вместо термина «*окружность, пересекающую плоскую фигуру или многоугольник»,* лучше использовать термин «*дыра*» (*hole, bore*) [1]. Например, вместо термина «*окружность Эйлера*» можно использовать термин «*дыра Эйлера*» или «*о-сть Эйлера*» и т. д.

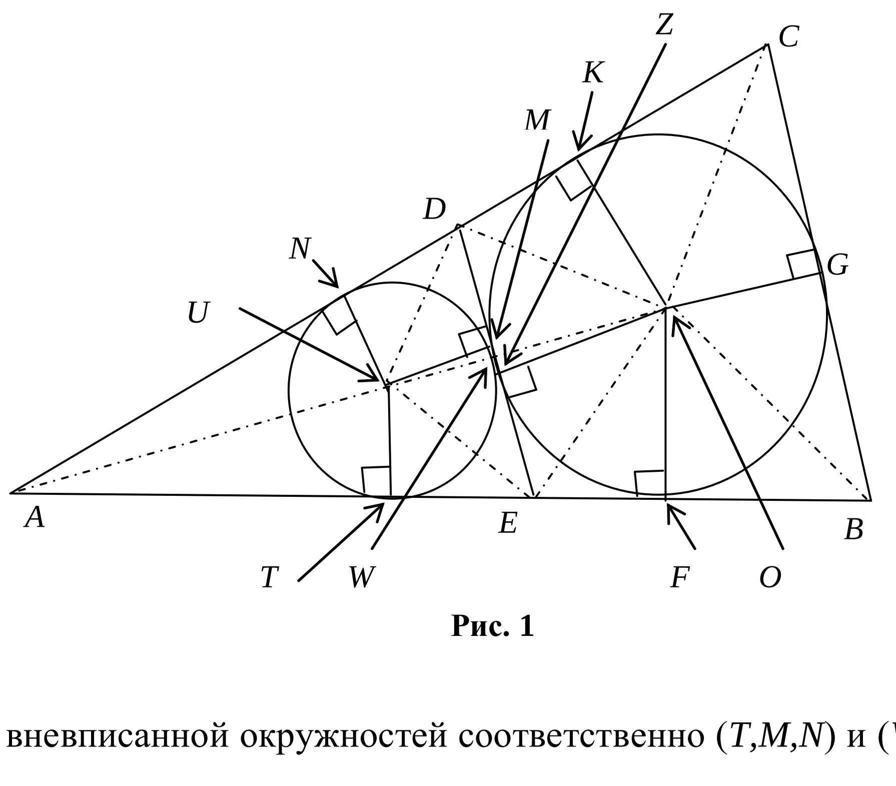

**Рис. 1**

**Исследования в*писанной* окружности (обода) и вневписанной окружности (внеобода) 3-ка**. На рис. 1 *U* и *O* – центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно (*T,M,N*) и (*W,F,G,K*) 3-ка *AED* соответственно радиусов $TU = MU = NU = r$ и $WO=FO=GO=KO= r_a$; $AU$, $EU$, $DU$ - биссектрисы внутренних углов 3-ка $AED$; $AO$, $CO$, $BO$ - биссектрисы внутренних углов 3-ка $ADC$; $EU$, $DU$ - биссектрисы внешних углов 3-ка $AED$, поэтому $EU\perp EO$ и $DU\perp DO$. Если обозначить углы $\angle EAD = \angle CAB = \alpha$, $\angle AED = \beta$, $\angle ADE = \gamma$, то $\angle EAW = \angle DAW = \angle CAU = \angle BAU = \alpha/2$, $\angle AEU = \angle DEU = \beta/2$, $\angle ADU = \angle EDU = \gamma/2$, $\angle BEO = \angle DEO = (\pi-\beta)/2$, $\angle EDO = \angle CDO = (\pi-\gamma)/2$. $DM=EZ=UM\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma/2= r\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma/2= OZ\cdot\mathrm{tg}\,\gamma/2= r_a\cdot\mathrm{tg}\,\beta/2$ или $r\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma/2= r_a\cdot\mathrm{tg}\,\beta/2$ или $r/r_a=(\mathrm{tg}\,\gamma/2)\cdot(\mathrm{tg}\,\beta/2)$. Обозначим также $DE = a$, $AE = c$, $AD = b$, $a+b+c=2p$. Если верно последнее соотношение с тангенсами, то верны и все ему предшествующие. **Поэтому** найдем независимо $r$ и $r_a$. Как равные касательные из одной точки к одной окружности $AK= AD+DK= AF= AE+EF$. Как равные касательные из одной точки к одной окружности $DK=DZ$ и $EF=EZ$. Поэтому $AK+AF=AD+DK+AE+EF = AD+DZ+AE+EZ = AD+AE+(DZ+ +EZ)= AD+AE+ED=2p(AED)=2p$. Здесь через $p(AED)$ обозначен полупериметр 3-ка $AED$. Итак, $AF=p(AED)= p$. Из прямоугольного 3-ка $AOF$ имеем $AF=p= OF\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha/2= r_a\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha/2$, поэтому $r_a=p\cdot\mathrm{tg}\,\alpha/2$. Из теоремы котангенсов для 3-ка $AED$ имеем $r=(p-a)\mathrm{tg}\,\alpha/2$. Откуда $r/r_a= (p-a)/p= 1-a/p$. По теореме синусов $a=2R\sin\alpha=4R(\sin\alpha/2)(\cos\alpha/2)$. С другой стороны, известно, что $p=4R(\cos\alpha/2)(\cos\beta/2)(\cos\gamma/2)$. Поэтому $r/r_a=1-a/p=1-4R(\sin\alpha/2)(\cos\alpha/2)/(4R(\cos\alpha/2)(\cos\beta/2)(\cos\gamma/2))=1-(\sin\alpha/2)/((\cos\beta/2)(\cos\gamma/2))= (\cos\beta/2\cos\gamma/2-\sin\alpha/2)/((\cos\beta/2)(\cos\gamma/2))$. Найдем числитель последнего выражения: $\cos\beta/2\cos\gamma/2-\sin\alpha/2= \cos\beta/2\cos\gamma/2-\sin(\pi-\beta-\gamma)/2= \cos\beta/2\cos\gamma/2-\cos(\beta+\gamma)/2= \cos\beta/2\cos\gamma/2-(\cos\beta/2\cos\gamma/2-\sin\beta/2\sin\gamma/2)= \sin\beta/2\sin\gamma/2$. Итак, $r/r_a=1-a/p= (\sin\beta/2\sin\gamma/2)/((\cos\beta/2)(\cos\gamma/2))= (\mathrm{tg}\,\beta/2).(\mathrm{tg}\,\gamma/2)$, что полностью совпадает с ранее полученным результатом. Т.е. $DM=EZ$. С учетом этого $DE=a=DM+ME= EZ+ME= ET+EF=TF$. $TF=a=AF-AT= OF\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha/2 -UT\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha/2 = (r_a-r)\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha/2$. Из подобных прямоугольных 3-ков $UMW$ и $OZW$, у которых $\angle UMW=\angle OZW=|\beta-\gamma|/2$, имеем $UO= UW+WO= UM/(\cos(\beta-\gamma)/2) +OZ/(\cos(\beta-\gamma)/2) = (UM+OZ)/(\cos(\beta-\gamma)/2)=(r+r_a)/(\cos(\beta-\gamma)/2)$. Поэтому $TF=a= UO\cdot\cos\alpha/2=(r+r_a)$

cos $\alpha/2$/ $(\cos(\beta-\gamma)/2)$. С другой стороны, $TF=a=(r_a-r)\cdot\text{ctg}\,\alpha/2$. Деля правые и левые части двух последних равенств, имеем $(r_a-r)/(r_a+r)=(\sin\alpha/2)/(\cos(\beta-\gamma)/2)$. **Заметим**, что угол $\angle UMW=\angle OZW=|\beta-\gamma|/2$ равен углу между биссектрисой и высотой, опущенных из вершины угла $\angle DAE=\alpha$ или равен половине угла между высотой и сивысотой, опущенных из вершины того же угла $\angle DAE=\alpha$ (см. наше «11-е исследование по геометрии»). Используем ранее полученное равенство $r\cdot\text{ctg}\,\gamma/2=r_a\cdot\text{tg}\,\beta/2$ в другом полученном равенстве $a=(r_a-r)\cdot\text{ctg}\,\alpha/2$, исключив из него $r_a=r\cdot\text{ctg}\,\gamma/2\ \text{ctg}\,\beta/2$. Имеем $a=((r\cdot\text{ctg}\,\gamma/2\ \text{ctg}\,\beta/2)-r)\cdot\text{ctg}\,\alpha/2=(r\cdot\text{ctg}\,\alpha/2\ \text{ctg}\,\gamma/2)(\ \text{ctg}\,\beta/2-\ \text{tg}\,\gamma/2\ )=(r\cdot\text{ctg}\,\alpha/2\ \text{ctg}\,\gamma/2)(\cos(\beta+\gamma)/2)/(\sin\beta/2\ \cos\gamma/2)=(r\cdot\text{ctg}\,\alpha/2)(\cos(\beta+\gamma)/2)/(\sin\beta/2\ \sin\gamma/2)=(r\cdot\text{ctg}\,\alpha/2)(\cos(\beta+\gamma)/2)/(\sin\beta/2\ \sin\gamma/2)=$ $)=(r\cdot\text{ctg}\,\alpha/2)(\cos(\pi-\alpha)/2)/(\sin\beta/2\ \sin\gamma/2)=(r\cdot\cos\alpha/2)/(\sin\beta/2\ \sin\gamma/2)$. Имеем верную, легко выводимую другими способами, формулу: $a=(r\cdot\cos\alpha/2)/(\sin\beta/2\ \sin\gamma/2)$. Например, если в эту формулу подставить $a=2R\sin\alpha=4R(\sin\alpha/2)(\cos\alpha/2)$, то получим верное соотношение: $r=4R\sin\alpha/2\ \sin\beta/2\ \sin\gamma/2$.

Для прямоугольного 3-ка $UEO$ теорема Пифагора дает $UO^2=UE^2+EO^2$ или $(r+r_a)^2/(\cos(\beta-\gamma)/2)^2=r^2/(\sin\gamma/2)^2+r_a^2/(\cos\gamma/2)^2$. Подстановка сначала $r_a=r\cdot\text{ctg}\,\gamma/2\ \text{ctg}\,\beta/2$, а затем $r=a(\sin\beta/2\ \sin\gamma/2)/(\cos\alpha/2)$, полученных ранее, дает в итоге $(r+r_a)(\cos(\beta-\gamma)/2)=a/(\cos\alpha/2)$, которое уже получено нами ранее. Подставляя последний результат в формулу для теоремы Пифагора выше, имеем $a^2/(\cos\alpha/2)^2=r^2/(\sin\gamma/2)^2+r_a^2/(\cos\gamma/2)^2$.

Найдем длину биссектрисы $AW=l_a=h_a/\cos((\beta-\gamma)/2)$ на рис. 1, где $h_a$ - длина высоты, опущенной из той же вершины. Имеем $AW=AU+UW=UT/(\sin\alpha/2)+UM/(\cos(\beta-\gamma)/2)=r(1/(\sin\alpha/2)+1/(\cos(\beta-\gamma)/2))=(r/((\sin\alpha/2)(\cos(\beta-\gamma)/2))(\sin(\alpha/2)+\cos(\beta-\gamma)/2)=(r/((\sin\alpha/2)(\cos(\beta-\gamma)/2))(\cos(\pi-\alpha)/2+\cos(\beta-\gamma)/2)=2r(\cos\beta/2)(\cos\gamma/2)/((\sin\alpha/2)(\cos(\beta-\gamma)/2))=h_a/\cos((\beta-\gamma)/2)$. Отсюда $h_a/r=2(\cos\beta/2)(\cos\gamma/2)/((\sin\alpha/2)$. Тот же самый результат может быть получен, используя выражение для $h_a=bc/(2R)$ или $h_a/r=bc/(2R\,r)=(2R\sin\beta\ 2R\sin\gamma)/(2R\ 4R\sin\alpha/2\ \sin\beta/2\ \sin\gamma/2)=(\cos\beta/2)(\cos\gamma/2)/((\sin\alpha/2)=2(\cos\beta/2)(\cos\gamma/2)/((\sin\alpha/2)$, т. е.

тот же самый результат, если учесть, что sin β = 2(cos β/2) (sin β/2) и sin γ = 2(sin γ/2)(cos γ/2).

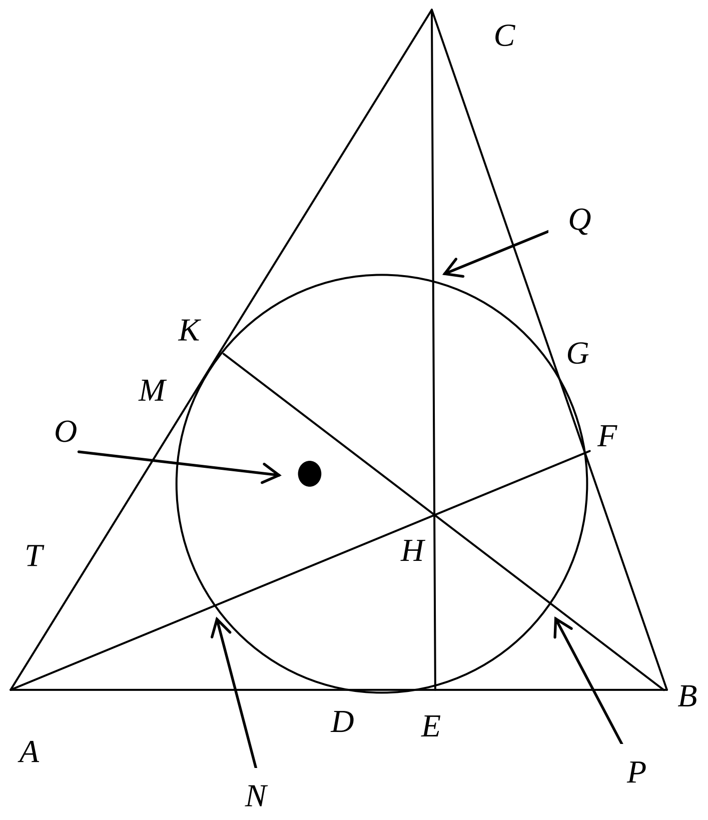


**Рис. 2**

**Многоугольники, связанные с окружностью Эйлера.** На рис. 2 в остроугольном 3-ке *ABC*: *AF, BK, CE* – три высоты, *H* – ортоцентр, (*D,E, P, F,G, Q,K, M, N*) - окружность Эйлера, *D, G, M* – середины сторон 3-ка, *O* - центр его описанной окружности, *N, P, Q* - середины довысот (предвысот) 3-ка, т. е. *AN=NH, BP=PH, CQ=QH*. Пусть ∠*ABC* – наибольший внутренний угол 3-ка *ABC*. Тогда основания *E* и *F* высот *CE* и *AF* лежат ближе к вершине *B*, чем основания медиан *D* и *G*. Тогда 4-к *BEHF* вписан в окружность, *BH* - ее диаметр, *P* -ее центр. Т. е. *PE* = *PF*. **9-к** *DEPFGQKMN* вписан в окружность Эйлера (*D,E, P, F,G, Q,K, M, N*)**.** В нем одинаковые 4 из 9 сторон**:** *PE* = *PF=QG=ND=R* cos (∠*ABC*). Действительно уже показано, что *PE* = *PF*. Далее *PQ* – средняя линия 3-ка *BCH,* т.е. *PQ*||*BC* или *PQ*|| *GF*. 4-к *PQGF* вписан в окружность Эйлера и у него параллельны 2 противоположные стороны *PQ* и *GF*. Поэтому он – равнобокая трапеция. Следовательно, *PF*=*QG*. Аналогично *NP* – средняя линия 3-ка *ABH*, т.е. *NP*||*AB* или *NP*||*DE*. 4-к *NPED* вписан в окружность Эйлера и у него параллельны 2 противоположные стороны *NP* и *ED*. Поэтому он – равнобокая трапеция. Следовательно, *PE*=*ND*. Итак, *PE* = *PF=QG=ND*. **Заметим**, что в 9-ке *DEPFGQKMN* одинаковые еще 2 из 9 сторон**:** *QK*=*MN* Действительно *QN* – средняя линия

3=ка $ACH$, т.е. $QN \mid\mid AC$ или $QN \mid\mid MK$. 4-к $QNMK$ вписан в окружность Эйлера и у него параллельны 2 противоположные стороны $QN$ и $MK$. Поэтому он – равнобокая трапеция. Следовательно, $NM=QK$. **Заметим,** что внутри 9-ка $DEPFGQKMN$ можно выделить 21 **параллелограмм и 3 прямоугольника** по признаку равенства и одновременной параллельности (#) соответствующих противоположных сторон 4-ка: $MOHP$- параллелограмм ($MO\#HP$), $MOPB$ – параллелограмм ($MO\#PB$), $NDHP$ – параллелограмм ($ND\ \#HP$), $NDPB$ – параллелограмм ($ND\ \#PB$), $GQHP$ – параллелограмм ($GQ\ \#HP$), $GQPB$ – параллелограмм ($GQ\ \#PB$), $GQMO$ – параллелограмм ($GQ\ \#MO$), $DNMO$ – параллелограмм ($DN\ \#MO$), $MQHN$ – параллелограмм ($MQ\ \#HN$), $MQNA$ – параллелограмм ($MQ\ \#NA$), $DPHN$ – параллелограмм ($DP\ \#HN$), $DPNA$ – параллелограмм ($DP\ \#NA$), $OGHN$ – параллелограмм ($OG\ \#HN$), $OGNA$ – параллелограмм ($OG\ \#NA$), $DPOG$ – параллелограмм ($DP\ \#OG$), $DPOG$ – параллелограмм ($DP\ \#OG$), $MQGO$ – параллелограмм ($MQ\ \#GO$), $ODNK$ – параллелограмм ($OD\ \#NK$), $ODPG$ – параллелограмм ($OD\ \#PG$), $ODHQ$ – параллелограмм ($OD\ \#HQ$), $ODQC$ – параллелограмм ($OD\ \#QC$), $NDGQ$ – прямоугольник ($ND\ \#GQ$), $NPGK$– прямоугольник ($NP\#GK$), $MQPD$ – прямоугольник ($MQ\ \#PD$).

**3 из 9 оставшихся сторон** 9-ка $DEPFGQKMN$: $DE$, $FG$ и $MK$,- лежат на 3 сторонах 3-ка $ABC$. 3 дуги окружности Эйлера ($D,E,\ P,\ F,G,\ Q,K,\ M,\ N$), на которые они опираются, как хорды, удовлетворяют теореме Мавло. Для их длин можно вывести формулы. По теореме синусов имеем:

$DE=R\sin(\angle DQE)= R\sin(|\angle CAB-\angle ABC|)$,

$MK=R\sin(\angle MPK)= R\sin(|\angle CAB-\angle ACB|)$,

$GF=R\sin(\angle GNF)= R\sin(|\angle ABC-\angle ACB|)$,

**Покажем это**. Например, $DE=(|AE-EB|)/2=(|AC\cos(\angle CAB)-$

- $BC\cos(\angle ABC)\ |)/2= (|b\cos(\angle CAB)- a\cos(\angle ABC)\ |)/2=$
- $=(|2R\sin(\angle ABC)\cos(\angle CAB)- 2R\sin(\angle CAB)\ \cos(\angle ABC)\ |)/2=$
- $= R\sin(|\angle CAB-\angle ABC|)$.

**Заметим**, что отрезки $PM$, $QD$ и $NG$ являются диаметрами окружности Эйлера, их середины совпадают и лежат на середине отрезка $OH$. Диаметр окружности Эйлера равен $R$ – радиусу описанной окружности.

**Выводы.** По нашему мнению, рассмотренные вопросы будут полезны геометрам.

Литература:

1. Стариков В.Н. Лингвистические исследования по геометрии (в порядке обсуждения) / В сборнике: Тамбов на карте генеральной: социально-экономический, социокультурный, образовательный, духовно-нравственный аспекты развития региона //Сборник материалов Всероссийской научной конференции. Под общ. ред. В.Я. Никульшина. - 2016. С. 341.

**UDC 514**

# 12-TH RESEARCH ON GEOMETRY

**Starikov V. N.**,
major teacher.
Michurinsk State Agrarian University,
Michurinsk , Russia,
E-mail: vnst@mail.ru.

**Abstract**. It is described a new results of the triangle, the bilateral.

**Keywords** (Docuterm): the geometry, the triangle, the bilateral.