УДК 514

9-Е ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

Стариков Владимир Николаевич
старший преподаватель,
Мичуринский государственный аграрный университет,

г. Мичуринск, Россия.

E-mail: vnst@mail.ru

Аннотация. Сообщаются новые теоремы для треугольника и четырехугольника.

Ключевые слова: геометрия, теоремы, треугольник, четырехугольник.

Введение. В настоящей работе введено сокращение слова: треугольник=**3-к,** четырехугольник=**4-к**. Также окружность здесь будет обозначаться перечислением в круглых скобках всех точек, через которые она проходит.

Пусть *A, B,* и *C* – внутренние углы 3-ка или радианные меры этих углов, которые связаны формулой $A+B+C=\pi$. Пусть *a, b,* и *c* – стороны 3-ка, лежащие против углов соответственно *A, B,* и *C, R* – радиус описанной окружности, *S* - площадь 3-ка.

Результаты исследований.

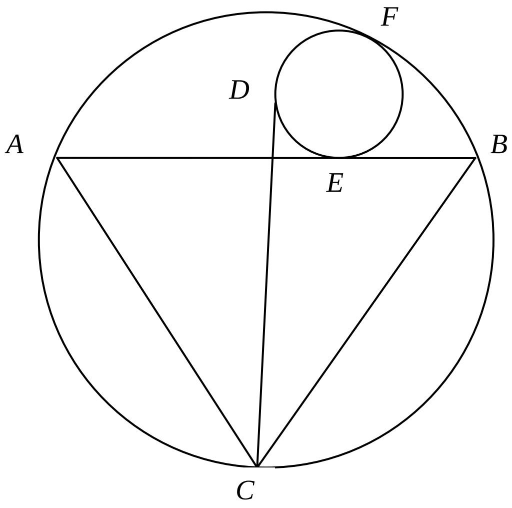

Рис. 1

Доказательство частного случая нашего общего утверждения в параграфе «Общий радикальный центр семейств окружностей» в нашем «5-ом исследовании по геометрии» [1]. Если на рис. 1 внутри произвольной большой окружности (*A,C,B,F*) хордой *A, B* отсечь круговой сегмент (*A,E,B,F*) меньше половины этой окружности и в полученный сегмент вписать произвольную малую окружность (*D,E, F*) любого диаметра так, чтобы она касалась в одной точке *E* хорды, *AB,* а в другой точке *F* касалась внутренним образом этой большой окружности, а из точки *C*, лежащей на диаметре большой окружности, перпендикулярном выше упомянутой хорде *AB*, провести касательную *CD*. к указанной выше окружности, то длина этой касательной *CD* будет постоянна и равна *AC* и *CB*. Т. е. 2-ой конец *D* этой касательной *CD* всегда будет лежать на окружности с центром в точке *C* радиусом *AC*. Т. е. в данном случае *CD*= *AC*=*CB*. **Доказательство.** Пусть на рис. 1 большой окружности (*A,C,B,F*) касаются внутренним образом 4 окружности: 3 окружности, выродившиеся в точки *A, C* и *B*, и 4-я окружность (*D,E, F*), касающаяся большой окружности (*A,C,B,F*) в точке *F*, хорды *AB* большой окружности в точке *E*, а касательной, проведенной из точки *C*, в точке *D*. Пусть *AC*=*CB*. Тогда *по теореме Кейси* имеем: $CD{\cdot}AB= AE{\cdot}CB+BE{\cdot}AC$. Т. к. *AC*=*CB* и *AE* +*BE*= *AB*, имеем $CD{\cdot}AB= CB(AE +BE)= CB{\cdot}AB$. Откуда *CD* = *CB*=*AC*, *что и требовалось доказать*. В силу произвольности выбора малой окружности (*D,E, F*), вписанной в круговой сегмент (*A,E,B,F*), наше доказательство верно для всего семейства окружностей, вписанных в круговой сегмент (*A,E,B,F*). **Замечание**.

Можно доказать более общее утверждение для семейства окружностей (*D,E, F*), вписанных не в круговой сегмент (*A,E,B,F*), а в «линзу», у которой хорда *AB* (отрезок прямой) заменяется на окружность произвольного фиксированного радиуса (в том числе и бесконечного радиуса). При этом «линза» может иметь и форму кругового сегмента, показанного на рис. 1, и форму сдвоенного кругового сегмента (как сечение двояковыпуклой оптической линзы), и форму полумесяца (как сечение выпукло-вогнутой оптической линзы). Искомый *радикальный центр* семейства указанных вписанных окружностей будет лежать на оси симметрии этой «линзы». Иногда он будет уходить в бесконечность. Формулы для расстояния до этого искомого *радикального центра* и для длины постоянной касательной, отсчитанной от этого *радикального центра,* даны в упомянутом выше нашем «5-ом исследовании по геометрии». Естественно, доказательство общего случая не столь простое и короткое, как приведено выше, и основано не на теореме Кейси, а на использовании особенностей геометрии рисунка, который гораздо сложнее рис. 1.

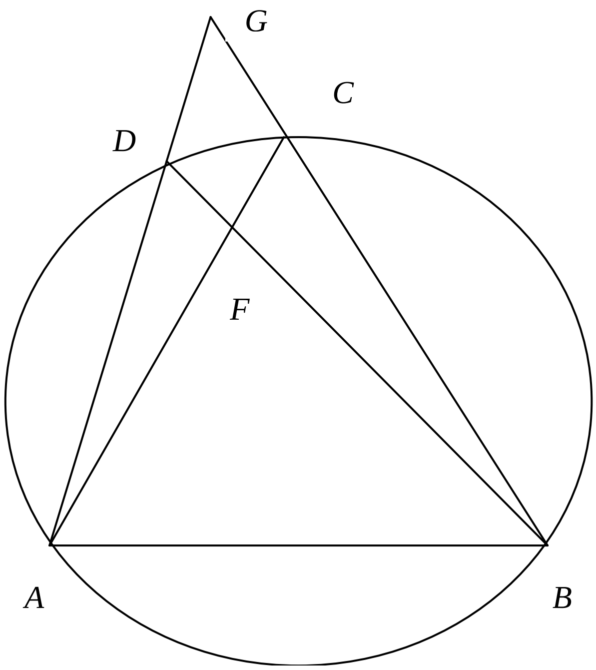

Рис. 2

Одно новое геометрическое место точек. На рис. 2 даны фиксированный отрезок *AB* прямой и фиксированная точка *F* плоскости. Берется произвольная окружность (*A. B*), проходящая через концы отрезка *AB*, и через точку *F*, проводятся две хорды *BD* и *AC* окружности. Затем через найденные концы *D* и *C* хорд проводятся две секущие *AD* и *BC* и находится их общая точка пересечения *G*. **Вопрос:** опишите геометрическое место получающихся точек пересечения *G*, если отрезок *AB* и точка *F* фиксированы на плоскости, а окружности, проходящие через концы отрезка *AB*, произвольные. **Замечание,** Искомое геометрическое место точек *G* есть кривая или прямая, всегда проходящая, через саму точку *F*. В частном случае, когда точка *F* проходит через серединный перпендикуляр к отрезку *AB*, искомое геометрическое место точек совпадает с самим серединным перпендикуляром, т.е. является прямой линией. В общем случае это – не прямая.

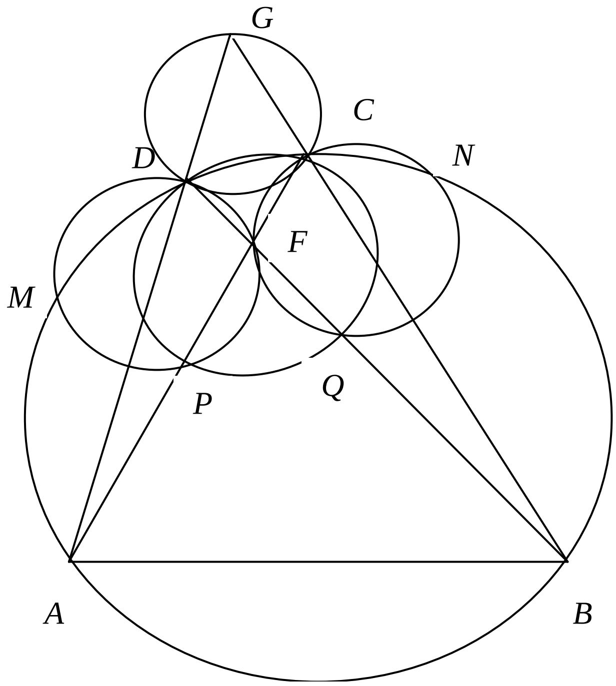

Рис. 3

Гипотеза о 6 окружностях. На рис. 3 проведены 4 окружности: (*A*,*B*,*C*,*D*), (*G*,*C*,*D*,*F*), (*M*,*D*,*F*,*P*), (*N*,*C*,*F*,*Q*), проходящие через 4 точки. **Гипотеза утверждает,** что если через 4 точки проходит 5-я окружность (*D*,*C*,*Q*,*P*), то через 4 точки проходит и 6-я окружность (*D*,*C*,*N*,*M*). Гипотеза превращается в верное утверждение- теорему в частном случае, если *AC* и *BD* - две высоты 3-ка *ABG*. Доказать эту гипотезу в общем случае.

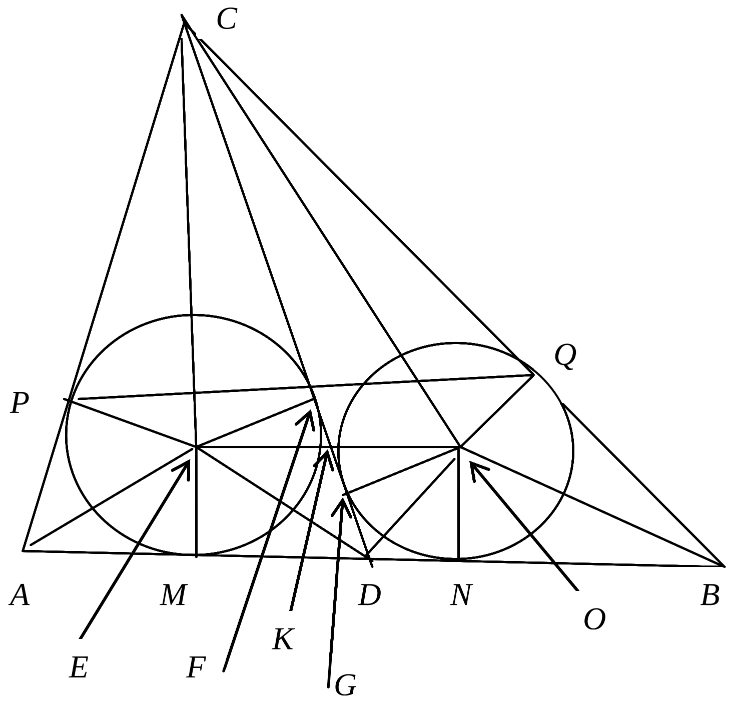

Рис. 4

Решение задачи о чевиане, разбивающей 3-к на 2 3-ка с одинаковыми вписанными окружностями. В своих заметках, мы утверждали, что в любом 3-ке существует такая единственная точка, что будучи соединенной с 3 вершинами 3-ка отрезками прямых, она разобьет 3-к на 3 таких 3-ка, что у них будут вписанные окружности одинаковых радиусов [2]. В общем случае решение этой задачи оказалось очень сложным. Мы пока решили более простую задачу. На рис. 4 в 3-ке *ABC* проведена искомая чевиана *CD* так, что в 3-ках *ADC* и *DBC* две вписанные окружности (*P*,*M*,*F*) и (*Q*,*N*,*G*) имеют одинаковые радиусы: *PE* = = *ME* = *FE* = *QO*= *GO* = *QO* =*r*, *ME*⊥*AB*, *NO*⊥*AB*, *PE*⊥ *AC*, *QO*⊥ *BC*, *FE*⊥ *CD*, *GO*⊥ *CD*. 4-к *MNOE* – прямоугольник, 4-к *FOGE* – параллелограмм. Отрезки *AO*, *CO*, *DO*, - биссектрисы внутренних углов 3-ка *ADC*, *DO*, *BO*, *CO*- биссектрисы внутренних углов 3-ка *BDC*. ∠*EDO*=π/2. ∠*ECO*= ∠*ACB*/2. Найдем разность площадей 3-ков *ADC* и *DBC* *ADC* и *DBC*: *S*(*ADC*)- *S*(*DBC*)=h_c(*AD*-*BD*)/2, где h_c – длина высоты, опущенной из вершины *C* на сторону *AB*. С другой стороны, анализ показывает, что та же разность площадей *S*(*ADC*)- *S*(*DBC*)= 2*S*(*AME*)- 2*S*(*BNO*). Остальные площади, кроме удвоенных площадей 3-ков *AME* и *BNO*, взаимно уничтожаются. Из прямоугольных 3-ков *AME*, *DME*, *DNO* и *BNO* находим *AD*-

$$BD=r\left(ctg\frac{A}{2}-ctg\frac{B}{2}+ctg\varphi-tg\varphi\right)==r\left(\frac{sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}{sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}}+\frac{cos2\varphi}{sin\varphi\, cos\varphi}\right)=r\left(\frac{sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}{sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}}+2\,ctg2\varphi\right)=$$

$=2\frac{S(ADC)-S(DBC)}{h_c}$. Здесь φ=∠*MDE*=(π/2)-∠*NDO*. С другой стороны, *S*(*ADC*)-*S*(*DBC*)= 2*S*(*AME*)- 2*S*(*BNO*)= *AM*·*ME*- *BN*·*NO*=r^2(ctg (*A*/2)- ctg (*B*/2))=

$r^2\left(\dfrac{sin\left(\dfrac{B - A}{2}\right)}{sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}}\right)$. Откуда получим $2\,ctg2\varphi=\dfrac{sin\left(\dfrac{B - A}{2}\right)}{sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}}\left(\dfrac{2r}{h_c}-1\right)$. Из прямоугольных 3-ков *DME* и *DNO* находим *MN*= *MD*+ *ND*= *r* (ctg φ + tg φ)=$\dfrac{2r}{sin2\varphi}$. С другой стороны, *MN*= *AB*-*AM*-*NB*= *c*- *r*× × (ctg (*A*/2)+ ctg (*B*/2))= $\dfrac{sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}{sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}}$. Из последних двух цепей уравнений имеем $\dfrac{c}{r}=\dfrac{2}{sin\,2\varphi}+\dfrac{cos\dfrac{C}{2}}{sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}}$ или $c\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_0}\right)=\dfrac{2}{sin\,2\varphi}$. Здесь использованы обозначения: *c*=*AB*, r_0 - радиус вписанной окружности 3-ка *ABC*, который всегда оказывается больше искомого радиуса *r*. Кроме того, здесь использовано известная в геометрии формула: $\dfrac{c}{r_0}=\dfrac{cos\dfrac{C}{2}}{sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}}$. К предпоследнему уравнению надо добавить ранее полученное уравнение $2\,ctg2\varphi=\dfrac{sin\left(\dfrac{B - A}{2}\right)}{sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}}\left(\dfrac{2r}{h_c}-1\right)$. В этой системе уравнений с 2 неизвестными *r* и φ можно исключить φ, используя легко выводимое тождество: $\left(\dfrac{1}{sin\,2\varphi}\right)^2-1=ctg^2\,2\varphi.$ Получим уравнение с 1 неизвестным: $c^2\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_0}\right)^2-1=\left(\dfrac{sin\dfrac{B-A}{2}}{sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}}\right)^2\left(\dfrac{2r_c}{h_c}+1\right)^2=\left(\dfrac{b-a}{r_0}\right)^2\left(\dfrac{2r_c}{h_c}+1\right)^2$. Здесь учтена формула Мольвейде $\dfrac{sin\dfrac{B-A}{2}}{sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}}=\dfrac{(b-a)cos\dfrac{C}{2}}{c\,sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}}=\dfrac{(b-a)}{c}\dfrac{c}{r_0}$. В предпоследней (окончательной) формуле введено переобозначение искомого радиуса: $r=r_c$, ибо он зависит от того, из какой вершины проведена чевиана *CD* (на рис. 4 из вершины *C*).

Выводы. По-нашему мнению, рассмотренные вопросы будут полезны геометрам.

Литература:

1. Стариков В.Н. 5-е Исследование по геометрии // Наука и Образование. 2018. - № 1. С. 50.
2. Стариков В.Н. Заметки по геометрии// Научный поиск: гуманитарные и социально-экономические науки: сборник научных трудов. Выпуск 1/ Гл ред. Романова И .В. Чебоксары: ЦДИП «INet», 2014. С. 37-39.

UDC 514

9-TH RESEARCH ON GEOMETRY

Starikov V. N.,
major teacher.
Michurinsk State Agrarian University,
Michurinsk, Russia,
E-mail: vnst@mail.ru.

Abstract. It is described a new theorems of the triangle, the bilateral.

Keywords (Docuterm): the geometry, theorems, the triangle, the bilateral.