УДК 514

8-Е ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

Стариков Владимир Николаевич

старший преподаватель,

Мичуринский государственный аграрный университет,

г. Мичуринск, Россия.

E-mail: vnst@mail.ru

Аннотация. Сообщаются новые теоремы для треугольника и четырехугольника и новые тригонометрические формулы для треугольника для углов *A*, *B*, и *C* треугольника и его сторон.

Ключевые слова: геометрия, теоремы, треугольник, четырехугольник, тригонометрические формулы.

Введение. В настоящей работе введено сокращение слова: треугольник=**3-к,** четырехугольник=**4-к**. Также окружность здесь будет обозначаться перечислением в круглых скобках всех точек, через которые она проходит.

Пусть *A, B,* и *C* – внутренние углы 3-ка или радианные меры этих углов, которые связаны формулой $A+B+C=\pi$. Пусть *a, b,* и *c* – стороны 3-ка, лежащие против углов соответственно *A, B,* и *C, R* – радиус описанной окружности, *S* - площадь 3-ка.

Результаты исследований.

Некоторые новые тригонометрические формулы для 3-ка:

$$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C=1+\cos C\cos(A-B);$$

$$(\sin A+\sin B)^2\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}\left(\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin^2\frac{C}{2}\right);$$

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)+\cos C; \qquad 4R^2(1+\cos A\cos B\cos C)=q;$$

$$abc^2\cos(A-B)=2a^2b^2-(2q-c^2)(q-c^2); \quad \left(a^2-b^2\right)^2\cos^2\frac{C}{2}+\left(a^2+b^2\right)^2\sin^2\frac{C}{2}=c^2;$$

$$tg\,\frac{A-B}{4}=\sqrt{\left(\frac{c-(a+b)\sin\frac{C}{2}}{c+(a+b)\sin\frac{C}{2}}\right)\left(\frac{c-(a+b)\sin\frac{C}{2}}{c-(a+b)\sin\frac{C}{2}}\right)}=\frac{c-(a+b)\sin\frac{C}{2}}{(a-b)\cos\frac{C}{2}}=\frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{c+(a+b)\sin\frac{C}{2}};$$

$$\left\{\begin{matrix}\cos\frac{A-B}{4}\\ \sin\frac{A-B}{4}\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{c\pm(a+b)\sin\frac{C}{2}}{2c}}\sqrt{\frac{c\mp(a+b)\sin\frac{C}{2}}{c\mp(a+b)\sin\frac{C}{2}}}=.\frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sqrt{2c\left(c\mp(a+b)\sin\frac{C}{2}\right)}}.$$

(здесь записаны 2 формулы соответственно при верхних и при нижних всюду знаках). Использованы 2 формулы соответственно при верхних и при нижних всюду знаках:

$$c^2=(a\pm b)^2\mp 4ab\left\{\begin{matrix}\cos^2\frac{C}{2}\\ \sin^2\frac{C}{2}\end{matrix}\right\};\ \left((a+b)\sin\frac{C}{2}\pm(a-b)\cos\frac{C}{2}\right)^2=c^2\left(1\pm\sin(A-B)\right)=$$

$$=c^2\pm\left(a^2-b^2\right)\sin C;\ c^2\pm\left(a^2-b^2\right)\sin C=\left[(a+b)\sin\frac{C}{2}\pm(a-b)\cos\frac{C}{2}\right]^2=$$

$$=\left(\cos\frac{A-B}{2}\pm\sin\frac{A-B}{2}\right)^2=\left[\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{A-B}{2}\right)\right]^2.$$

Замечание. Заметим, что многие новые формулы для выражений типа $\pm\sin kA \pm \sin kB \pm \sin kC$ или для выражений типа $\pm\cos kA \pm \cos kB \pm \cos kC$, где k=0,5; 1;2;3;4; приведенные в нашем «*5-ом исследовании по геометрии*»[1], могут быть получены с помощью общего тригонометрического тождества, верного для любых углов α, β и γ:

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$, данного без доказательства в книге: *Моденов В.П.* Пособие по математике. Часть II. (Ред. *Моденов П.С.*). М.: И-во МГУ, 1972. С. 28, п. 41, а также легко получаемого из него заменой углов тождества: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$. Чтобы получить из них указанные формулы для 3-ка, надо от общих углов α, β и γ перейти к внутренним углам 3-ка *A, B,* и *C* по формулам: α= *kA*, β= *k B* и γ= *k C*,-и воспользоваться очевидными формулами для углов 3-ка: *A*+*B*+*C* = π, = *A*+*B* =π-*C*. *B*+*C*=π -*A*, *C A*+=π-*B*,- сделать простейшие преобразования и использовать формулы приведения для тригонометрических функций. Доказательства формул получаются очень простыми.

Аналог теоремы Мавло для описанной окружности: *3 наименьшие из 2 дуг, которые каждый раз отсекают на описанной окружности остроугольного 3-ка 3 пары отрезков прямых в виде продолжений высот 3-ка и диаметров этой окружности, проведенных из 3 вершин, удовлетворяют соотношению Мавло: одна из дуг равна сумме двух других*. Математически это означает выполнение при одном из знаков соотношения для радианных мер 3 упомянутых дуг: $\pm 2|A-B| \pm 2|B-C| \pm 2|C-A| = 0$.

Теорема о 4 точках на 2 противоположных сторонах 4-ка, вписанного в окружность, лежащих на одной окружности. По аналогией с *симедианой* и с *антибиссектрисой* введем понятия *сивысоты* и *антивысоты* хотя в дальнейшем нам пока понадобится только *сивысота*. **Определение.** *Сивысотой* остроугольного 3-ка, проведенной из данной вершины, называется та часть диаметра его описанной окружности, проведенного из данной вершины, которая целиком лежит внутри данного остроугольного 3-ка. Название *сивысота* происходит от слов *си*мметричная и *высота*, ибо *сивысота* оказывается изогонально сопряженной *высоте,* опущенной из данной вершины на противоположную сторону 3-ка (известный факт). Т.е. *сивысота* и *высота* опущенные из данной вершины на противоположную сторону 3-ка, симметричны относительно биссектрисы угла, проведенной из той же вершины. Заметим, что в тупоугольном 3-ке *сивысота* может лежать вне 3-ка и быть больше диаметра его описанной окружности, ибо симметричная ей высота также может лежать вне 3-ка. В рассмотренной ниже теореме *сивысота* будет лежать внутри 3-ка.

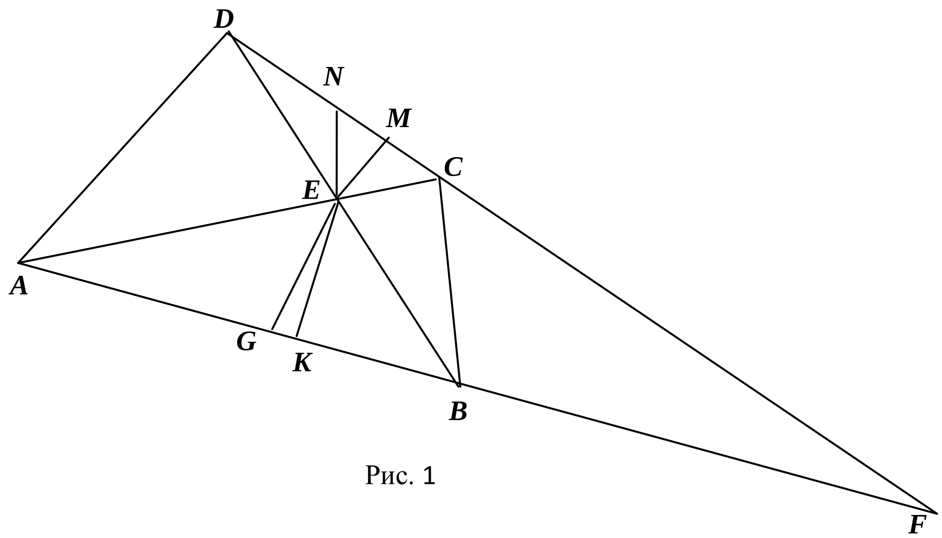

Рис. 1

Формулировка теоремы о 4 точках, лежащих на одной окружности. Пусть 4-к *ABCD* на рис. 1 вписан в некоторую окружность, Отрезки *EK* и *EG, EM* и *EN* представляют собой высоту и сивысоту соответственно 3-ков, *AEB* и *CED*, опущенные из общей вершины *E* на противоположные стороны (сами 3-ки получены путем проведения в 4-ке *ABCD* двух диагоналей *AC* и *BD*). Тогда теорема, указанная в заголовке данного параграфа, утверждает, что 4 точки *G, K, M* и *N* (основания двух пар высот и сивысот) лежат на одной окружности. **Доказательство.** Для 4-ка *ABCD,* вписанного в некоторую окружность, известно, что его угол ∠*AFD*, образованный на пересечении пары противоположных сторон *AB* и *CD*, равен разности пары углов ∠*ABD*-∠*CAB*= ∠*ABE*-∠*EAB* и равен другой разности пары углов ∠*ACD*-∠*CDB*= ∠*ECD*-∠*CDE*. Здесь предполагается, что сторона *AD* больше стороны *CB* в 4-ке *ABCD,* вписанном в окружность. Соответственно хорда *AD* больше хорды *CB* в упомянутой окружности, дуга AD больше дуги CB в упомянутой окружности. Следовательно, равные углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$, вписанные в окружность и опирающиеся на дугу AD, больше равных углов -$\angle CAB$ и $\angle CDB$, вписанных в окружность и опирающихся на дугу CB. С другой стороны, известно, что, например, угол $\angle GEK$ между высотой KE и сивысотой GE по величине также равен разности углов $\angle ABE$-$\angle EAB$, т.е. по величине равен углу $\angle AFD$. Аналогично угол $\angle MEN$ между высотой ME и сивысотой NE по величине также равен разности углов $\angle ECD$-$\angle CDE$, т.е. по величине равен углу $\angle AFD$. Этот факт использован в первом параграфе данной статьи с заголовком «*Аналог теоремы Мавло для описанной окружности*». Там также записаны углы между высотами и сивысотами 3-ка. Используем это без доказательства. Итак, $\angle AFD=\angle GEK=\angle MEN$ (на рис. 1 они не равны). В 4-ке $EKFM$ два противоположных угла $\angle EKF$ и $\angle EMF$ прямые ($EK\perp AF$, $EM\perp DF$), поэтому угол $\angle KEM=\pi-\angle AFD$. Однако $\angle KEM+\angle AFD=\pi=\angle KEM+\angle GEK=\angle KEM+\angle MEN=\pi$. Поэтому пара ломаных GEM и NEK на рис. 1 на самом деле является парой отрезков прямых. 3- ки GEK и MEN подобные, ибо у них равны две пары углов: $\angle GEK=\angle MEN$, как вертикальные, $\angle GKE=\angle EMN=\pi/2$. Поэтому 4 точки G, K, M и N лежат на одной окружности, диаметр которой равен GN, что и требовалось доказать. В частности, правило хорд дает: $GE\cdot EM = KE\cdot EN$. Теорема Пифагора дает: $GN^2=GK^2+NK^2=NM^2+GM^2$. **Замечание.** На рис. 1 мы нашли более простой способ доказательства факта, что $\angle AFD=\angle GEK=\angle MEN=\angle ABE-\angle EAB=\angle ECD-\angle CDE$. Т. к. 4-к $ABCD$ вписан в некоторую окружность, то подобны 3-ки ABE и CDE, образованные на пересечении хорд окружности. Если из общей вершины E этих 3-ков, в которой стыкуются два равных угла этих 3-ков ($\angle AEB=\angle CED$, как вертикальные), опустить на противоположные стороны соответственно AB и CD высоту и сивысоту, то высота и сивысота образуют между собой, а также со сторонами углов, из вершины E которых они выходят, 3 пары равных углов. Причем все углы каждой пары вертикальные Т.е. $\angle AEG=\angle MEC$ (вертикальные), $\angle BEK=\angle NED$ (вертикальные), $\angle GEK=\angle MEN$ (вертикальные). Все три пары углов вертикальные, как равные углы, отложенные из вершины *E E* от сторон двух вертикальных углов $\angle AEB$ и $\angle CED$. Поэтому пара ломаных *GEM* и *NEK* на рис. 1 на самом деле является парой отрезков прямых. В предыдущем доказательстве, мы показали, что $\angle KEM=\pi-\angle AFD$. Тогда $\angle GEK=\angle MEN=\angle AFD$, ибо $\angle GEK+\angle KEM=\angle MEN+\angle KEM=\pi$. Последнее следует из того, что пара ломаных *GEM* и *NEK* на рис. 1 на самом деле является парой отрезков прямых. То, что $\angle AFD=\angle ABD-\angle CAB=\angle ABE-\angle EAB=\angle ACD-\angle CDB=\angle ECD-\angle CDE$, легко следует из того, что угол $\angle ACD$ есть внешний угол для 3-ка *ACF*, угол $\angle ABD$ есть внешний угол для 3-ка *DBF*.

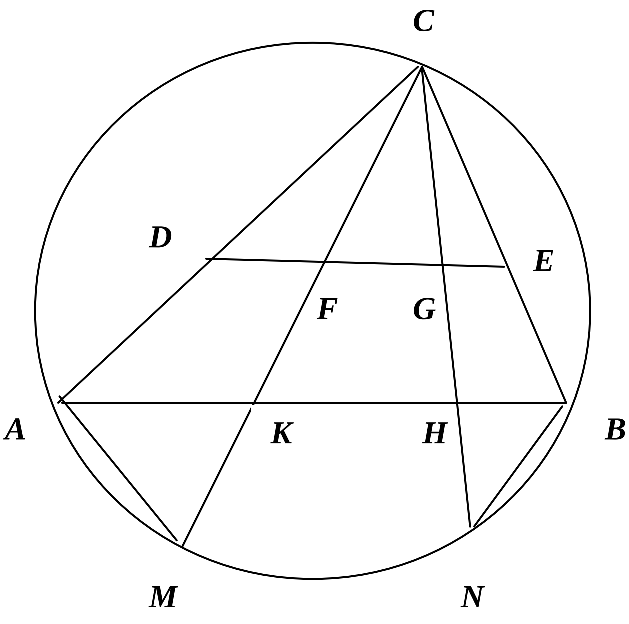

Рис. 2

Новые вариации теоремы о бабочке, полувписанной в окружность, рассмотренной в нашем *6-ом и 7-ом исследованиях по геометрии* [2]. Доказанная ранее теорема о бабочке, используя тот же метод доказательства, Позволяет доказать следующее утверждение (см. рис. 2). Пусть на рис. 2 параллельны $AB||DE$, $\angle ACM=\angle NCB$. Тогда можно доказать следующую цепь формул: $AC\cdot CE=BC\cdot CD=MC\cdot CG=NC\cdot CF$. Если отрезки *AB* и *DE* будут не просто параллельными, а совпадут, то мы получим, в частности, *теорему о бабочке, полувписанной в окружность.* При доказательстве используются две тройки подобных 3-ков: *ACM, BHC, CEG* и *BCN*, *AKC, DCF*,- которые подобны по признаку двух пар равных углов.

Выводы. По-нашему мнению, рассмотренные вопросы будут полезны геометрам.

Литература:

1. Стариков В.Н. 5-е Исследование по геометрии // Наука и Образование. 2018. - № 1. С. 50.
2. Стариков В.Н. 7-е Исследование по геометрии // Наука и Образование. 2018. - № 3-4. С. 50.

UDC 514

8-TH RESEARCH ON GEOMETRY

Starikov V. N.,

major teacher.

Michurinsk State Agrarian University,

Michurinsk , Russia,

E-mail: vnst@mail.ru.

Abstract. It is described a new theorems of the triangle, the bilateral and new formulae of the triangle.

Keywords: the geometry, theorems, the triangle, the bilateral, formulae of the trigonometry.