УДК 519.67

РЕДАКТИРОВАНИЕ КРАТНОМАСШТАБНЫХ КРИВЫХ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

Бутенко Анатолий Иванович
доктор сельскохозяйственных наук, профессор
ФГБОУ ВО Мичуринский ГАУ
г. Мичуринск, РФ.
but_tolik@mail.ru,

Аннотация. В статье описан метод иерархического представления кривых, который позволяет легко редактировать кривую для любой непрерывно меняющейся степени детализации.

Ключевые слова: вейлет, кратномасштабный анализ, B-сплайн.

В любой науке, использующей экспериментальные данные, при изучении изменяющихся во времени процессов приходится оперировать с большим количеством точек (t_i,y_i), которые в зависимости от принятой в дисциплине терминологии, называют сигналом или временны́м рядом. При таком табличном представлении, чтобы, например, обнаружить область быстрого изменения ряда или выделить периодические составляющие, нужно одновременно рассмотреть много точек.

Для решения подобных задач обычно используют анализ Фурье, который преобразует временны́е зависимости в частотные. Легко выделяются периодические составляющие: им соответствуют всплески спектра на соответствующих частотах. Однако при использовании методов Фурье теряется локальная информация: для получения каждого коэффициента Фурье требуется знание сигнала не только в прошлом, но и в будущем, что является теоретической абстракцией. Кроме того, большинство встречающихся на практике временны́х рядов являются конечными и апериодическими, в то время как дискретное преобразование Фурье можно применять только для периодических функций.

Недостатки методов Фурье заставили исследователей разрабатывать другой подход. В восьмидесятых годах двадцатого века появился математический инструмент для иерархического представления функций – вейвлеты, которые позволяют описать произвольную функцию в терминах грубого усредненного приближения и деталей различного масштаба. Такой подход еще называют кратномасштабным анализом.

Если вместо временных моментов t_i использовать значения абсцисс x_i, то получаем контрольные точки некоторой кривой (x_i,y_i). Кривые играют основополагающую роль во многих приложениях графики. В автоматизированном проектировании кривые, являющиеся контурами поперечного сечения, часто используются для описания поверхностей. Для трехмерного моделирования и анимации используются базовые кривые, которые описывают деформацию объектов. При работе с графикой кривые применяются для описания областей с постоянной текстурой или цветом, при разработке шрифтов кривые представляют собой контуры букв. Все эти приложения выигрывают от такого представления кривых, которое делает возможным гибкое редактирование, в частности, хорошее представление кривых должно поддерживать:

- непрерывное сглаживание, благодаря которому устраняются нежелательные детали кривой;
- возможность изменения общего контура кривой с сохранением мелких деталей или ее специфики;
- возможность редактирования кривой для любой непрерывно меняющейся степени детализации, допускающую непосредственную работу с произвольной частью кривой;
- возможность изменения специфики кривой с сохранением ее общего контура.

В работе [4] показано, как кратномасштабное представление кривой обеспечивает единообразный подход к рассмотрению всех вышеперечисленных проблем. А оно может быть получено простым процессом, известным под названием рекурсивное последовательное деление (recursive subdivision).

В этой работе мы хотим проиллюстрировать идею редактирования кривой на основе ее кратномасштабного представления.

На мониторе для визуального представления кривой, заданной набором точек можно использовать различные кривые. В работе [4] показано, что наиболее подходят для этих целей В-сплайны разной степени. Мы использовали самые простые из них – линейные. В них каждые две соседние точки соединяются отрезком прямых, а все точки представляется ломаной кривой. При большом числе точек углы сглаживаются, но если желательно провести через небольшое число точек плавную кривую, то лучше использовать кубические сплайны. Они сглаживают все углы.

Последовательное деление можно провести легко и просто для кривых, число точек которых представимо в виде 2^J+m, где J – целое число(высший уровень представления кривой), а m –степень B-сплайна. Так, что для линейного сплайна количество точек должно быть равным 2^J+1. Не всегда, особенно в экспериментальной кривой, количество точек может иметь такой вид, в этом случае составленная нами программа находит такое J, что удовлетворяется неравенство $2^J+1 < n < 2^{J+1}+1$. Далее определяется длина L кривой как сумма расстояний по формуле $L=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sqrt{\left(x_{j+1}-x_j\right)^2+\left(y_{j+1}-y_j\right)^2}\right)$ и делением L на 2^J+1 получаем шаг, с которым нужно равномерно расставить нужное количество точек на этой кривой. Координаты новых точек получаем с помощью линейной аппроксимации координат старых точек. Обязательно сохраняются крайние точки. Уменьшенное таким образом количество точек практически не сказывается на качестве кривой, у нас они обычно совпадали при наложении.

Связь между координатами точек разных уровней задается формулой

$$c^j = P^j c^{j-1} + Q^j d^{j-1}. \qquad (1)$$

В этой формуле c^j – матрица размера $2^j+1 \times 2$, содержащая координаты точек, которые аппроксимируют кривую на уровне j. Более грубая аппроксимация кривой задается матрицей c^{j-1}. Матрица d^{j-1} задает координаты точек, которые можно назвать «корректирующими». Она также имеет два столбца, а суммарное количество строк c^{j-1} и d^{j-1} совпадает с количеством строк матрицы c^j. Вид матриц P^j и Q^j определяется выбранными B-сплайнами. Так для линейных B-сплайнов, согласно работе [3], матрицы имеют вид

$$P^1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad Q^1=\sqrt{3}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{bmatrix};$$

$$P^2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad Q^2=\sqrt{\frac{3}{64}}\begin{bmatrix}-12 & 0\\ 11 & 1\\ -6 & -6\\ 1 & 11\\ 0 & -12\end{bmatrix};$$

$$P^{j\geq 3}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Q^{j\geq 3}=\sqrt{\frac{2^j}{72}}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ a_3 & -6 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ a_4 & 10 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 10 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & & -6 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_1 \end{bmatrix},$$

$$a_1=-11{,}022704;\ a_2=10{,}104145;\ a_3=-5{,}511352;\ a_4=0{,}918559.$$

Матрицы P^j и Q^jимеют одинаковую структуру: конечный столбец совпадает с начальным столбцом, записанным с конца, а отличные от нуля элементы средних столбцов повторяются со сдвигом на одну строку.

Размер матрицы P^j равен $2^j+1\times 2^{j-1}+1$. Количество строк матрицы Q^j равно числу строк матрицы P^j, а число столбцов 2^j-2^{j-1}.

Когда кривая не масштабирована, мы имеем кривую на самом высоком уровне c^J и нужно найти представления на всех более низких уровнях вплоть до первого. Запишем (1) по-другому

$$\left(P^j\middle|Q^j\right)\binom{c^{j-1}}{d^{j-1}}=c^j. \qquad (2)$$

Объединенная матрица $\left(P^j\middle|Q^j\right)$ является невырожденной, поэтому можно найти c^{j-1} и d^{j-1}, решая систему (2). Для ускорения этого процесса, следуя работе [4], мы переставили столбцы матриц P^j и Q^j так, что нечетные места занимают столбцы P^j, а четные – столбцы Q^j. Обозначим полученную матрицу как A. Она является ленточной: отличные от нуля элементы собраны вокруг главной диагонали. В матрице $\begin{pmatrix} c^{j-1} \\ d^{j-1} \end{pmatrix}$ также мешаем строки: нечетные строки занимают c^{j-1}, а четные - d^{j-1}. Обозначим полученную матрицу как u. Вместо (2) получаем систему

$$Au = c^j. \qquad (3)$$

Далее разлагаем матрицу A на произведение LU нижней треугольной с единичной диагональю и верхней треугольной матриц [1]. Обозначив $Uu=v$, получаем две системы

$$Lv = c^j, \ \ Uu = v. \qquad (4)$$

Из-за ленточного вида матрицы A матрицы L и U тоже имеют специальный вид. В каждой строке этих матриц не более трех ненулевых элементов, один из которых диагональный, два других элемента примыкают к нему у L слева, а у U – справа. Благодаря простому строению матриц, системы (4) даже при большом количестве строк решаются достаточно быстро методом прогонки [1]. После решения систем (4) из матрицы u извлекаем нечетные и четные строки в разные массивы, то есть получаем c^{j-1} и d^{j-1}. Матрицу d^{j-1} записываем в конец свободного массива, а по c^{j-1} находим описанным выше методом следующее более грубое приближение c^{j-2} и d^{j-2}. Затем матрицу d^{j-2} записываем в выбранный массив выше d^{j-1}, а c^{j-2} запускаем для поиска следующего грубого приближения. Продолжая этот процесс, получим массив с количеством строк как у первоначальной кривой, т.е. 2^J+1. Первые две строки будет занимать матрица c^1, а следующие строки будут занимать d^1, d^2,…, d^J. Получаем кратномасштабную кривую в одном массиве.

Чтобы получить кривую на каком-то уровне j нужно идти сначала. По c^1 и d^1 по формуле (1) находим c^2, выбирая из массива d^2, находим c^3 и т.д. до нужного уровня, вплоть до высшего.

Редактирование кратномасштабной кривой сводится к замене c^j на другую кривую с таким же количеством точек и восстановлением до высшего уровня с помощью корректирующих матриц прежней кривой. Или замена у кривой c^j корректирующих матриц от другой кривой с последующим восстановлением до высшего уровня.

Все расчеты в этой работе были выполнены по программам, написанным автором на языке C++ и компилированы в Visual Studio 2010.

На рисунке 1 представлены разные уровни кривой «Пятиконечная звезда». Для получения контура использовали соответствующий инструмент в графическом редакторе «Paint». Рисунок оцифровали по созданной нами программе и аппроксимировали $2^9+1=513$ точками. На рисунке 2 а) изображена синусоида. Первоначальные точки для нее мы рассчитали в Excel, используя функцию SIN(X). Значения X брали от 0 до 20π, а шаг выбрали такой, чтобы получилось $2^{10}+1=1025$ точек. Кривая б) тоже готовилась на Excel с теми же значениями X, а Y принимало попеременно значения 1 и -1. Ширина ступеньки согласовалась с колебаниями синусоиды. Кратномасштабные кривые, полученные по этим линиям по седьмой уровень включительно, являются прямыми, направленными по оси X. Только с c^8 появляются гребни и ступеньки. Они сначала имеют неправильную форму, но c^{10} дает окончательную форму.

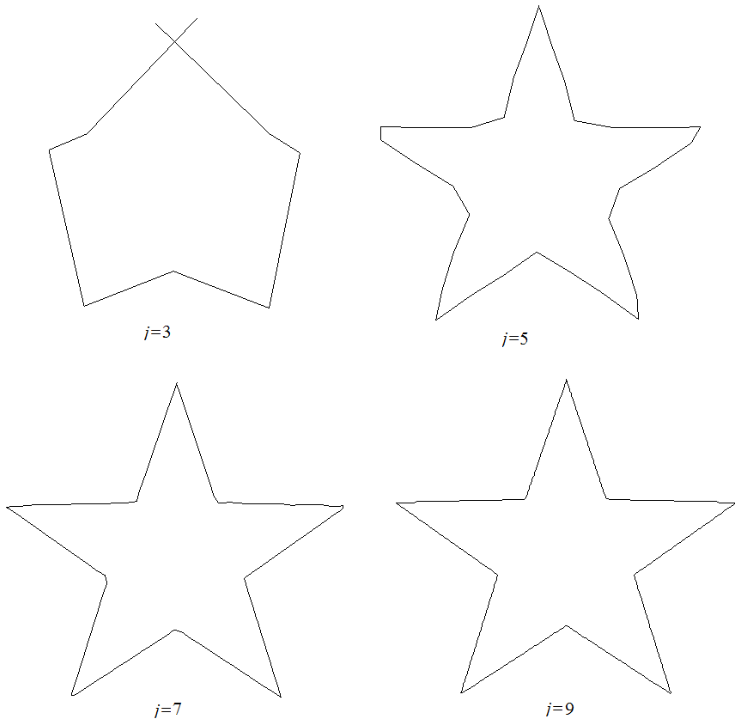

Рис. 1. Разные уровни кривой «Пятиконечная звезда»

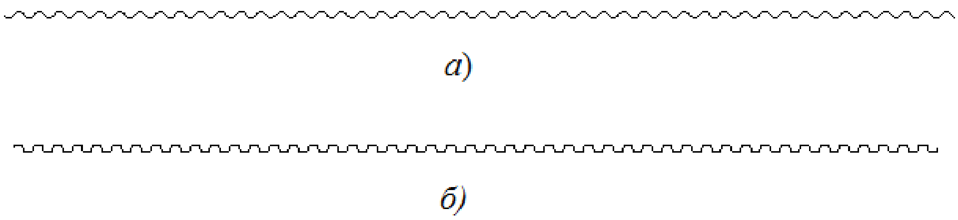

Рис.2.Кривые 10 уровня (фрагменты); а) синусоида; б) ступенчатая линия

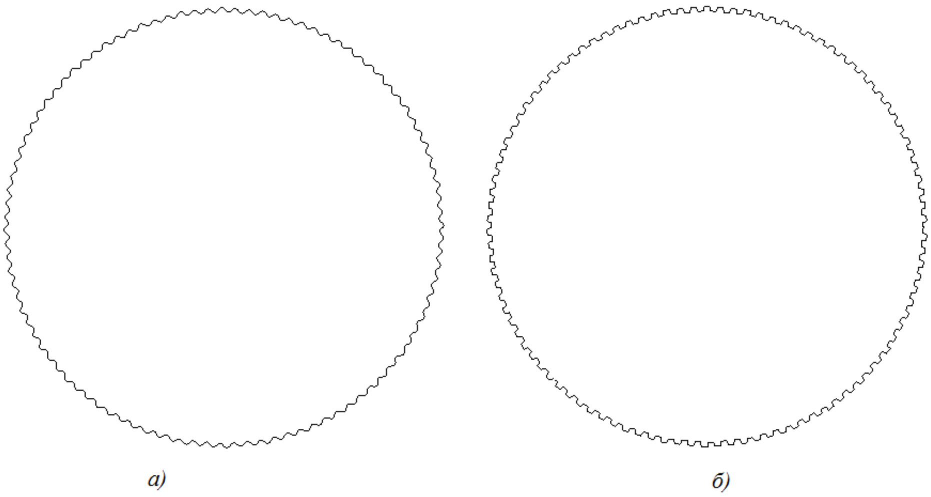

Рис. 3. Редактирование кривых; а) c^5 в линии а) рис.2 заменена на c^5 от окружности; б) то же самое проделано с линией б) рис.2.

На рисунке 3 изображена окружность с зубцами разной формы. Для получения точек окружности использовали формулы X=10*SIN(T), Y=10*COS(T), а T принимает значения от 0 с шагом $2\pi/32$. Получаем 32 точки-вершины многоугольника и последнюю 33 точку выбираем совпадающей с первой для замыкания. Полученными таким образом точками мы заменяли c^5 в кратномасштабных кривых а) и б), изображенных на рис. 2.

Кратномасштабная кривая в памяти компьютера занимает столько же места, как и первоначальная кривая, поэтому, казалось бы, нет никакого преимущества в такой организации данных, если она не приводит к их уплотнению. Описанная иерархическая организация кривой ведет к тому, что точки кривой оказываются взаимосвязанными в единый комплекс. Можно, например, составить программу, которая позволяла бы передвигать точки на экране компьютера. Тогда изменение положения одной точки в грубом представлении повлечет за собой изменение всей кривой в более высоких представлениях. С обычным набором точек такого действия проделать невозможно.

В понятии формы кривой в настоящее время нет единого понимания. В работе [2] отмечается, что математика описания форм, как возможная область исследования, до настоящего времени строго не развивалась, или даже не была признана в достаточной степени. Эти авторы разграничивают понятия формы и вида. Под *видом* они понимают те стороны геометрической формы, которые относятся к внешней стороне: той, которой объект предстает миру. Термин *форма* авторы используют для описания внутренней структуры. Степанов М.Е. [3] привлекает из биологии термин *архетип*, которым обозначается представление о первичном типе, прототипе, строения скелета всех позвоночных животных. Рассматривая две разные кривые а) и б) на рисунке 2 на более грубых представлениях мы получим для них один архетип – прямую линию. Кривые а) и б) на рисунке 3 имеют другой архетип – окружность.

Таким образом, кратномасштабное представление кривых позволяет повести анализ их формы применительно к той дисциплине, где изучаются объекты с этой формой.

Список литературы

1. Воеводин, В. В. Вычислительные основы линейной алгебры : учеб. пособие для вузов / В. В. Воеводин. - М. : Наука, 1977. - 303 с.

2. Лорд, И.А. Введение в дифференциальную геометрию и топологию. Математическое описание вида и формы/ И.А. Лорд, С.Б.Уилсон. – Ижевск: Институт компьютерных исследований , 2003.- 304с.

3. Степанов, М.Е. Метод криволинейных координат в компьютерной геометрии/ М.Е. Степанов //Моделирование и анализ данных. 2013. № 1. С. 157-192.

4. Столниц, Э. Вейвлеты в компьютерной графике/ Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Слезин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»,2002, 272 с.

EDITING MULTIRESOLUTION CURVES IN COMPUTER GRAPHICS

Anatoly Butenko,
doctor of technical sciences, professor
but_tolik@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University,
Michurinsk, Russia

Abstract: The article describes the method of hierarchical representation of curves, which makes it easy to edit the curve for any continuously varying degree of detail.

Key words: Valet, multiresolution analysis, B-spline.